

MATEMATIKA 3

TRANSFORMASI FOURIER

Oleh Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2017



Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
Departemen Teknik Informatika dan Komputer

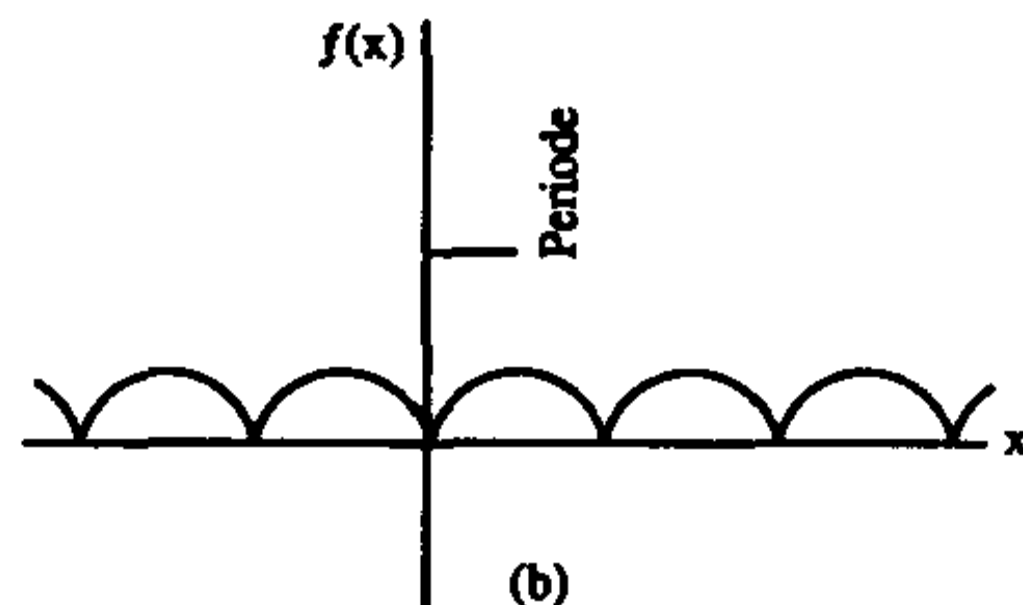
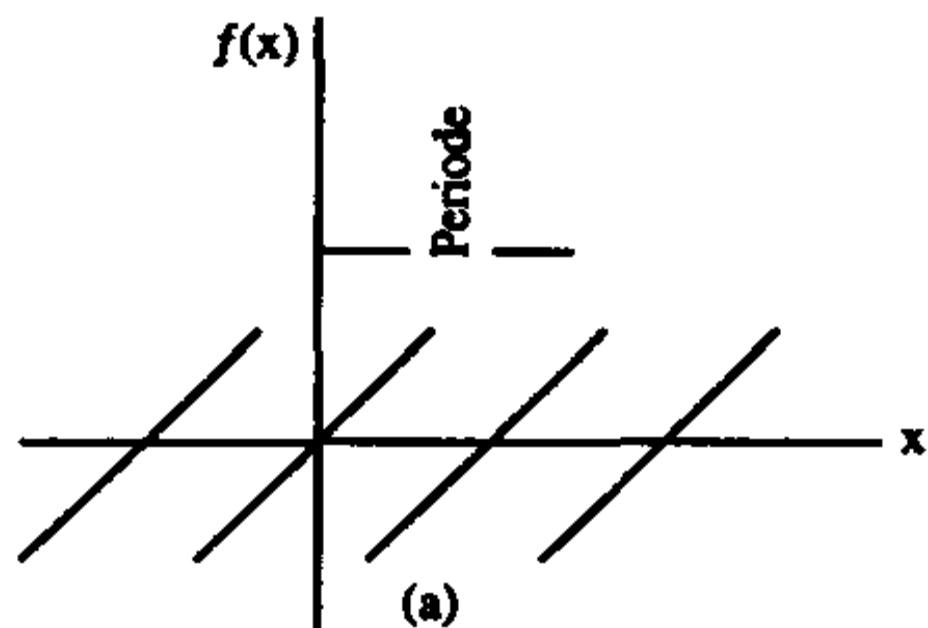
Konten

- Fungsi ganjil dan genap
- Transformasi fourier
- Integral fourier

FUNGSI GANJIL DAN GENAP

Suatu fungsi $f(x)$ dinamakan *ganjil* jika $f(-x) = -f(x)$. Jadi x^3 , $x^5 - 3x^3 + 2x$, $\sin x$, $\tan 3x$ semuanya adalah fungsi ganjil.

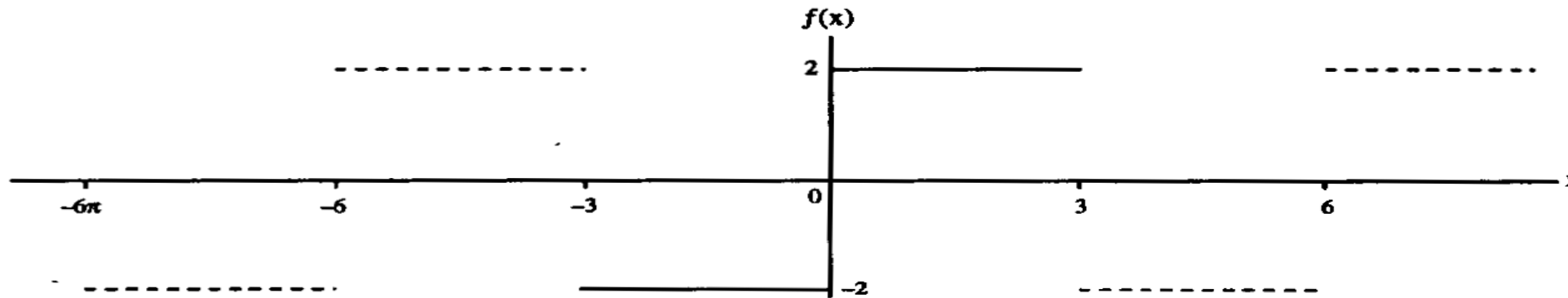
Suatu fungsi $f(x)$ dinamakan *genap* jika $f(-x) = f(x)$. Jadi x^4 , $2x^6 - 4x^2 + 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$ semuanya adalah fungsi genap.



Contoh 1

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 3 \\ -2 & -3 < x < 0 \end{cases} \quad \text{Periode} = 2\pi$$

Dari Gambar 10.7 di bawah dapat dilihat bahwa fungsi tersebut tidak ganjil dan tidak genap.

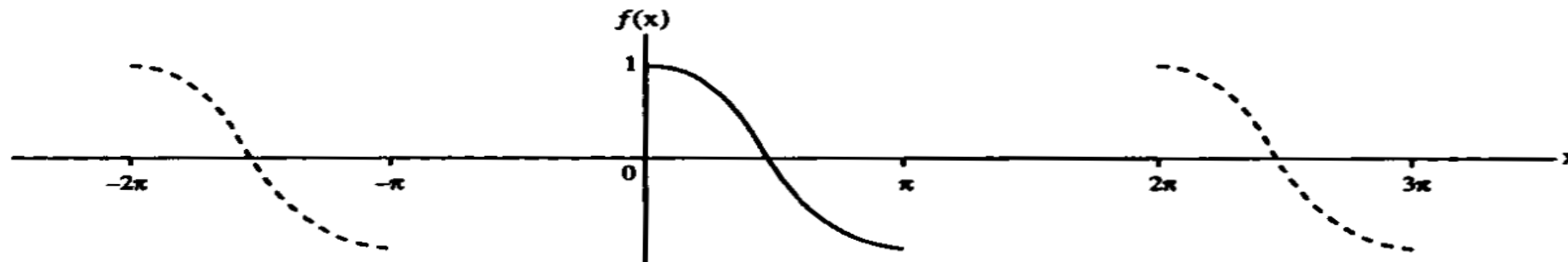


Gambar 10-7

Contoh 2

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad \text{Periode} = 2\pi$$

Dari Gambar 10-8 di bawah dapat dilihat bahwa fungsi tersebut tidak ganjil dan tidak genap.

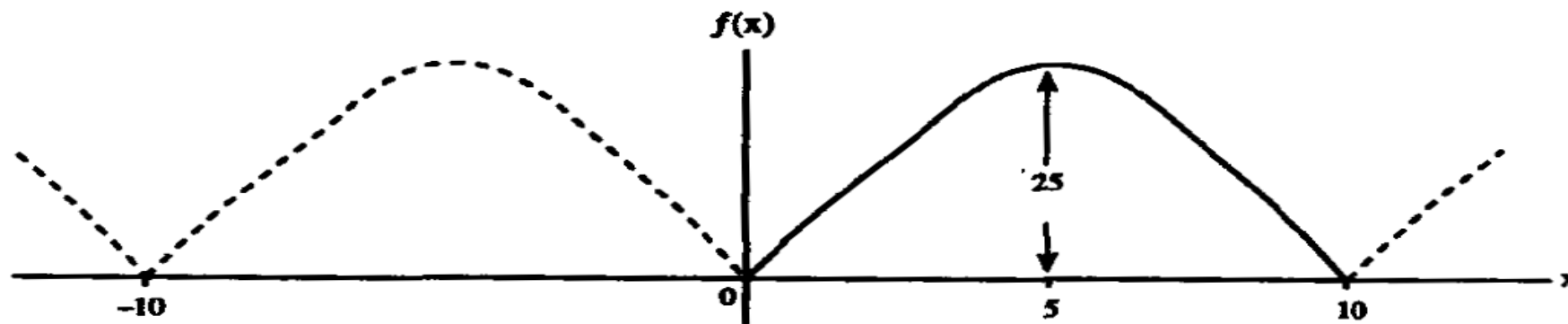


Gambar 10-8

Contoh 3

$$f(x) = x(10 - x), \quad 0 < x < 10, \quad \text{Periode} = 10$$

Dari Gambar 10-9 di bawah dapat dilihat bahwa fungsi tersebut genap.



Gambar 10-9

Buktikan

$$\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \frac{k\pi x}{L} dx = 0 \text{ jika } k = 1, 2, 3, \dots$$

JAWABAN

$$\int_{-L}^L \sin \frac{k\pi x}{L} dx = -\frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = -\frac{L}{k\pi} \cos k\pi + \frac{L}{k\pi} \cos (-k\pi) = 0$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = \frac{L}{k\pi} \sin k\pi - \frac{L}{k\pi} \sin (-k\pi) = 0$$

Buktikan _2

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}$$

di mana m dan n dapat diandaikan 1, 2, 3, . . .

Jawaban _2

Dari trigonometri : $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A - B) + \cos(A + B)\}$, $\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\}$.

Jika $m \neq n$, maka menurut Soal 10.2.

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} + \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right\} dx = 0$$

Dengan cara yang sama, jika $m \neq n$, maka

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right\} dx = 0$$

Jika $m = n$, kita mempunyai

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = L$$

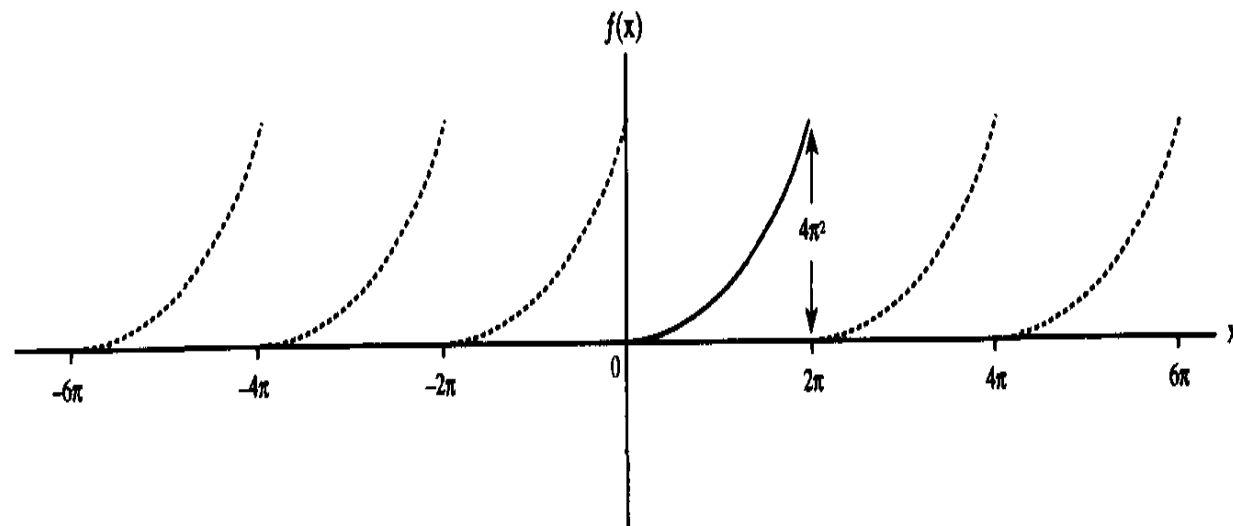
$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = L$$

$L_n J_t$

Perhatikanlah bahwa $m = n = 0$, maka integral ini berturut-turut sama dengan $2L$ dan 0 .

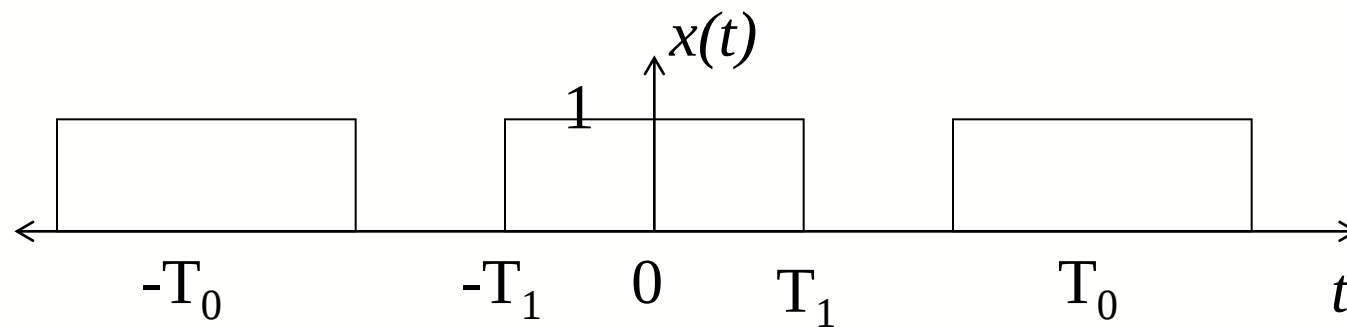
soal

Uraikanlah $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ dalam suatu deret Fourier jika (a) periodenya 2π ,
(b) periodenya tidak ditetapkan.



Transformasi Fourier

isyarat tak periodis



- Fungsi waktu :

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

- Komponen spektral

$$a_k = \frac{2\text{Sin}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_0}$$

$$T_0 a_k = \frac{2\text{Sin}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0}$$

Transformasi Fourier

$$T_0 a_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0} = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} \bigg|_{\omega = k\omega_0}$$

- gambar

Transformasi Fourier

- $\alpha(t)$: isyarat periodis dengan periode T_0

- $x(t)$ adalah

$$\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$T_0 a_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \alpha(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \begin{cases} \alpha(t), & |t| < T_0/2 \\ 0, & |t| \geq T_0/2 \end{cases}$$

$$T_0 a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Transformasi Fourier

- Jika $T_0 a_k = X(\omega)$ dan $\omega = k \omega_0$, maka

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

- Isyarat periodis $\alpha(t)$ menjadi

$$\alpha(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$T_0 = 2\pi/\omega_0$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

Transformasi Fourier

- Jika $T_0 \rightarrow \infty$, maka $\omega_0 \rightarrow 0$, sehingga $\alpha(t) = x(t)$

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \alpha(t)$$

$$x(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Transformasi Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(\omega)$$

- $X(\omega)$: Transformasi Fourier atas $x(t)$
- $x(t)$: Invers transformasi Fourier

Diskret Fourier Transform

- $x[n]$ adalah isyarat waktu diskret periodis dengan periode N . $x[n]$ dapat dirumuskan dengan*

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi n}{N}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi n}{N}}$$

Referensi

1. Discrete Mathematics and its Applications; Kenneth H. Rosen; McGraw Hill; sixth edition; 2007
2. Kastroud, Erwin Sucipto (Pentj) , Matematika Untuk Teknik , Erlangga , Jakarta 1987



bridge to the future

<http://www.eepis-its.edu>