MATEMATIKA 3

DERET FOURIER

Oleh Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2017

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
Departemen Teknik Informatika dan Komputer

Konten

- Fungsi Periodik
- **Deret Fourier Trigonometris**
- **Deret Fourier Eksponensial**
- **Syarat Dirichlet**
- **Deret Fourier sinus atau kosinus separuh jangkauan (half range)**
- **Identitas parseval**
- **Pendiffernsial dan pengintegralan deret fourier**

Fungsi periodik

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai periode T atau periodik dengan periode T jika untuk setiap x berlaku $f(x + T) = f(x)$, di mana T konstanta positif. Nilai positif terkecil T dinamakan periode terkecil atau disingkat periode $f(x)$.

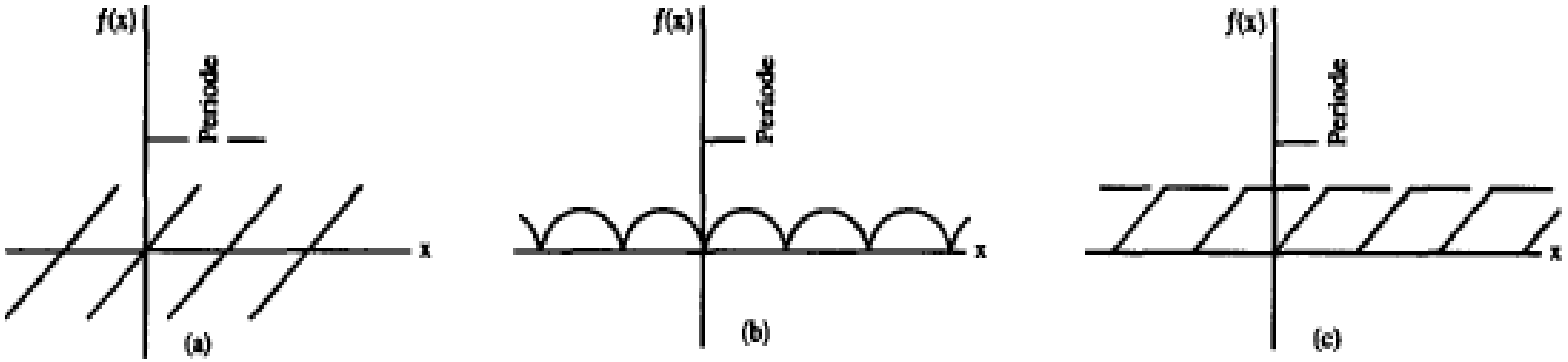
Contoh 1. Fungsi sin x mempunyai periode 2π, 4π, 6π, . . .karena sin $(x + 2\pi)$, sin $(x + 4\pi)$, sin $(x + 6\pi)$, . . . sama dengan sin x. Tetapi 2π adalah periode terkecil atau periode sin x.

Contoh 2. Periode fungsi sin nx atau cos nx, di mana n bilangan bulat positif, adalah $2\pi/n$.

Contoh 3. Periode tan x adalah π.

Contoh 4. Suatu konstanta mempunyai periode suatu bilangan positif.

contoh



Latihan soal

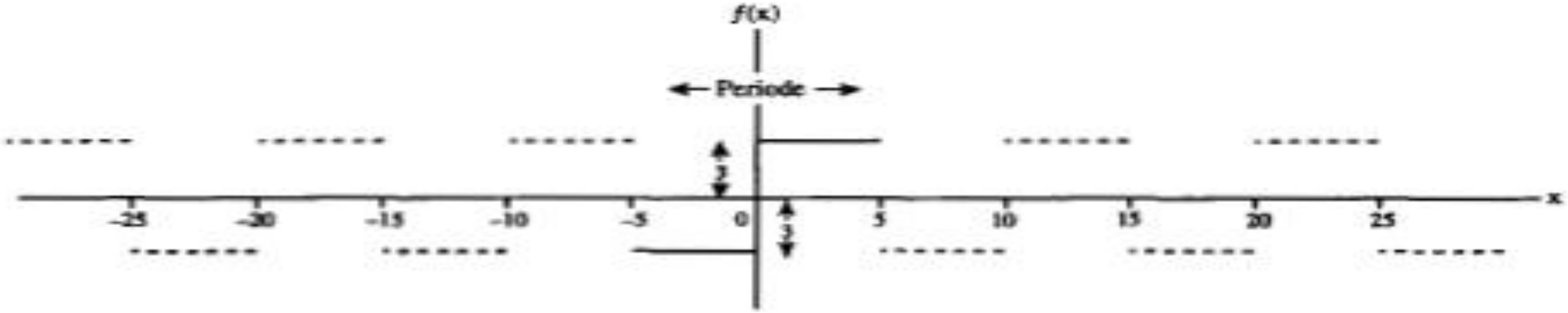
Gambarkanlah setiap fungsi berikut.

(a) $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases}$ Periode = 10

(b) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Periode = 2π

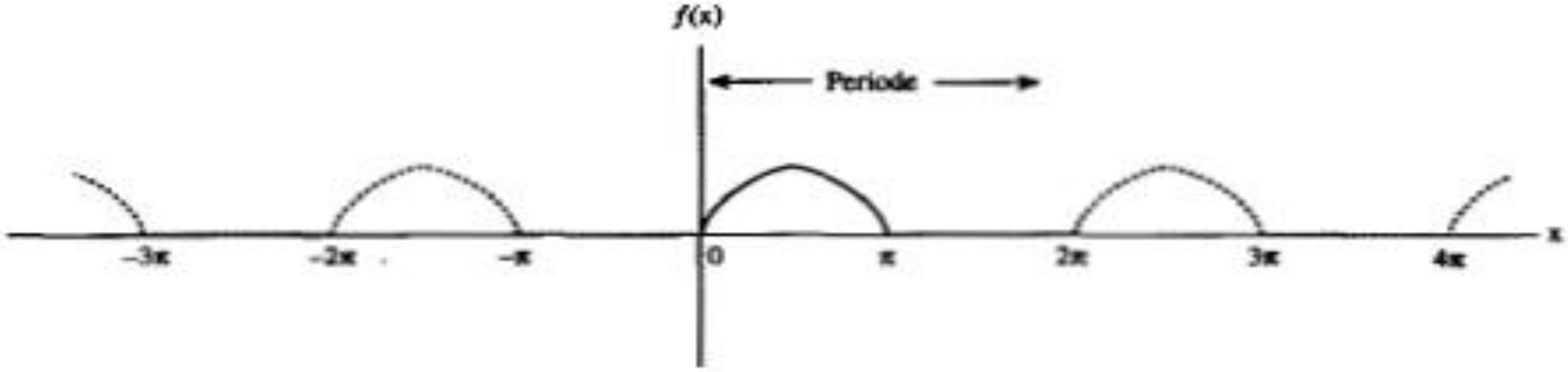
(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x < 6 \end{cases}$ Periode = 6

Jawaban



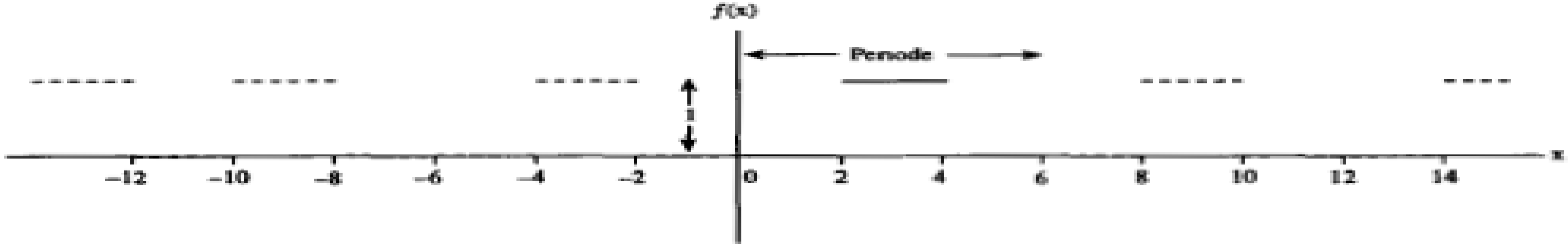
Gambar 10-2.

Karena periodenya 10, bagian grafik pada $-5 < x < 5$ (ditunjukkan dengaan garis tebal pada Gambar 10-2 di atas) diperluas secara periodik di luar jangkauan ini (ditunjukaan dengan garis terputus-putus). Perhatikanlah bahwa $f(x)$ tidak didefinisikan di $x = 0,5, -5, 10, 15, -15$ dan seterusnya. Titik-titik ini adalah titik ketakkontinuan $f(x)$.



Gambar 10-3

Perhatikanlah Gambar 10-3 di atas, $f(x)$ didefinisikan untuk setiap x dan kontinu di mana-mana

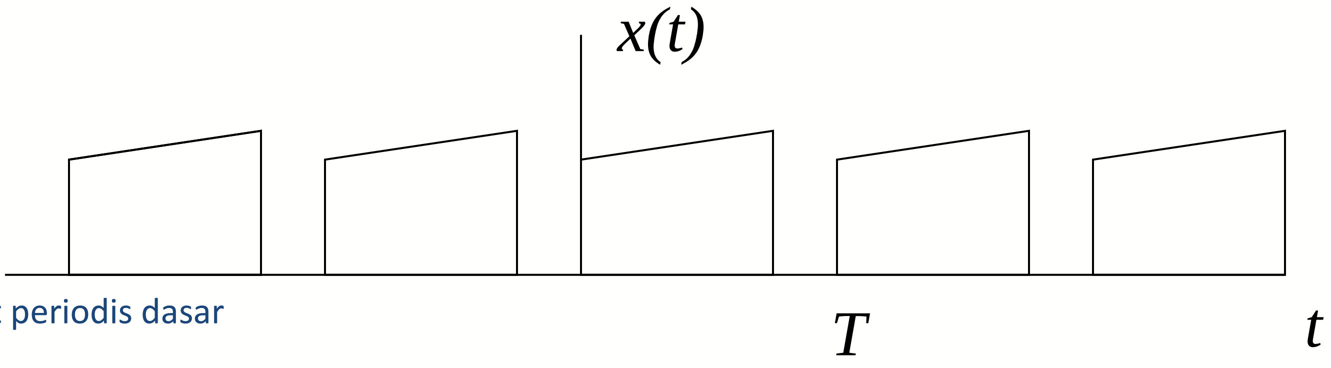


Gambar 10-4

Deret Fourier

- Isyarat *x(t)* dikatakan periodis jika dengan periode *T* maka

  x(t+T) = x(t)



- Isyarat periodis dasar

ω_0 : frekuensi fundamental

$T_0 = 2\Pi/\omega_0$: periode fundamental

$$x(t) = Cos\,\omega_0 t$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = Cos\,\omega_0 t + jSin\,\omega_0 t$$

Deret Fourier

- Suatu isyarat periodis dengan periode T_0 dapat dinyatakan sebagai jumlahan isyarat-isyarat lain dengan periode-periode kelipatan dari T_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

a_k untuk,

$k=0$ disebut komponen dc

$k=\pm 1$ disebut komponen fundamental

$k=\pm 2, \pm 3,..$ disebut komponen harmonik ke -k

Deret Fourier Trigonometris

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

T = periode

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Deret Fourier Trigonometris

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

atau

Misalkan $f(x)$ didefinisikan pada selang $(-L, L)$ dan di luar selang ini oleh $f(x + 2L) = f(x)$, yaitu diandaikan bahwa $f(x)$ mempunyai periode $2L$. Deret Fourier atau uraian Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ ditentukan oleh

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$

di sini koefisien Fourier a_n dan b_n adalah

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-1}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, . \qquad (2)$$

lanjutan

Jika $f(x)$ mempunyai periode 2L, maka koefisien a_n dan b_n dapat ditentukan ekivalen (setara) dengan bentuk

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_c^{c+2L} f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{L} \, dx \\ b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_c^{c+2L} f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{L} \, dx \end{cases} \qquad (3)$$

di sini c suatu bilangan riil. Dalam kasus khusus, $c = -L$, (3) menjadi (2).

Untuk menentukan a_0 pada (1), kita gunakan (2) atau (3) dengan $n = 0$.

Deret Fourier Eksponensial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{j n \omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, e^{-j n \omega_0 t} \, dt$$

SYARAT DIRICHLET

(1) $f(x)$ terdefinisi dan bernilai tunggal kecuali mungkin di sejumlah berhingga titik pada (–L, L).

(2) $f(x)$ periodik di luar (–L, L) dengan periode 2L.

(3) $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian pada (–L, L).

Maka deret (1) dengan koefisien (2) atau (3) konvergen ke :

(a) $f(x)$, bilamana x adalah suatu titik kekontinuannya.

(b) $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ bilamana x adalah suatu titik ketakkontinuannya.-

SYARAT DIRICHLET

Pada teorema ini, $f(x + 0)$ dan $f(x - 0)$ berturut-turut adalah limit kiri dan limit kanan dari $f(x)$ di x dan menyatakan $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x + \varepsilon)$ dan $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x - \varepsilon)$ di sini $\varepsilon > 0$. Ini sering kali dituliskan $\lim_{\varepsilon \to 0+} f(x + \varepsilon)$ dan $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x - \varepsilon)$ untuk menyatakan bahwa $\varepsilon \to 0$ dari arah nilai-nilai positif. Buktinya dapat dilihat pada Soal 10-18 dan 10-23.

Syarat (1), (2) dan (3) yang dinyatakan pada $f(x)$ adalah syarat cukup tetapi bukan syarat perlu, dan secara umum dalam prakteknya dipenuhi. Sekarang ini tidak diketahui syarat perlu dan cukup untuk kekonvergenan deret Fourier. Hal yang menarik adalah bahwa kekontinuan $f(x)$ tidak sendirian menjamin kekonvergenan suatu deret Fourier.

SYARAT DIRICHLET

Maka deret Fourier konvergen ke :

1. f(x) di x dimana f(x) continu
2. $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ untuk x dimana f(x) tidak kontinu.

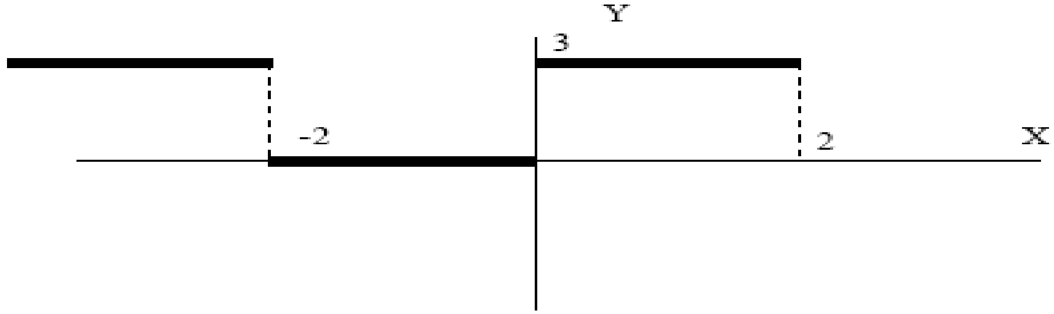
Soal 1

Perderetkan $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 2 \end{cases}$ menurut deret Fourier:

Soal 1

(periode 4, L = 2)

Penyelesian :



$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0 \ dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3 \ dx = \frac{1}{2} 3x \ \Big|_0^2 = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0 \cos\frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3 \cos\frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= 1/2\left[\frac{3.2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots (\sin n\pi = 0)$$

Soal 1

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= 1/2\left[-\frac{3.2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi), \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$b_n = 0$ untuk n genap

$$jadi: f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{2} + \ldots\right)$$

f (x) dapat ditulis sebagai berikut:

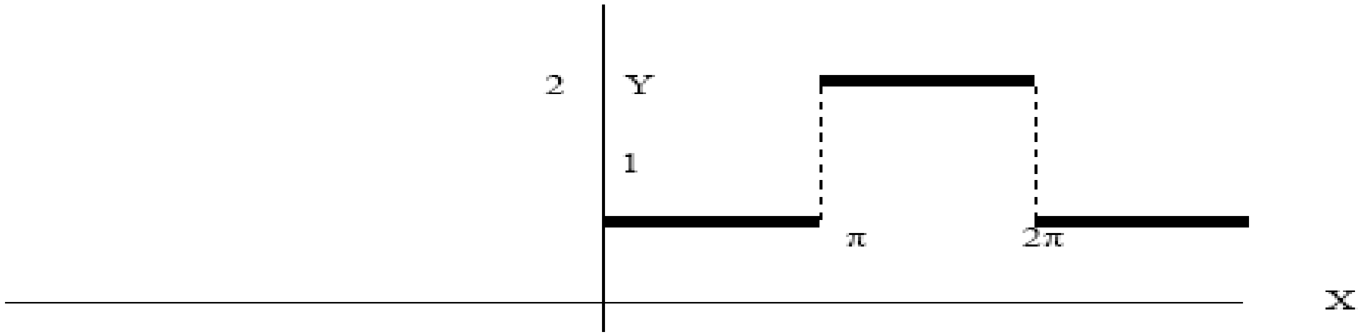
$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

Soal 2

Perderetan $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ menurut deret Fourier.

(periode 2π, $L = \pi$)

Penyelesaian:



Soal 2

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2dx = \frac{1}{\pi}\left\{[x]_0^{\pi} + 2x]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\{(\pi) + (4\pi - 2\pi)\} = 1 + 2 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos nxdx$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi}\sin nx\right]_0^{\pi} + \left[\frac{2}{n\pi}\sin nx\right]_2^{2\pi} = 0$$

Soal 2

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \,.\, \sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2 \,.\, \sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\sin nx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2.\sin nx\ dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos nx\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2}{n\pi}\cos nx\right]_{\pi}^{2\pi}$$

Soal 2

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \quad ; \quad (\cos 0 = \cos 2\pi)$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1), \qquad n = 1, 2, \; . \; . \; . \; . \; , \; b_n = 0 \text{ untuk n gebap}$$

$$b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$$

DERET FOURIER SINUS ATAU KOSINUS SEPARUH JANGKAUAN (HALF RANGE)

Suatu deret Fourier sinus atau cosinus separuh jangkauan berturut-turut adalah suatu deret di mana yang disajikan hanya suku-suku sinus atau hanya suku-suku kosinus, maka fungsi tersebut didefinisikan pada selang (0, L) [separuh selang (–L, L), yang merupakan penjelasan untuk istilah separuh jangkauan] dan kemudian fungsi tersebut dikelompokkan sebagai ganjil atau genap, agar ia dapat didefinisikan pada separuh selang lainnya, namakanlah (–l, 0). Dalam kasus ini, diketahui :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ untuk separuh jangkauan deret sinus}$$

DERET FOURIER SINUS ATAU KOSINUS SEPARUH JANGKAUAN (HALF RANGE)

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \text{ untuk separuh jangkauan deret cosinus}$$

IDENTITAS PARSEVAL

Identitas ini menyatakan bahwa

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

jika a_n dan b_n adalah koefisien Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ dan jika $f(x)$ memenuhi syarat Dirichlet.

PENDIFFERENSIALAN DAN PENGINTEGRALAN DERET FOURIER

Pendifferensialan dan pengintegralan deret Fourier dapat dikerjakan dengan menggunakan teorema tentang deret yang berlaku secara umum untuk setiap deret. Harus diperhatikan bahwa teorema itu memberikan syarat cukup dan bukan syarat perlu. Teorema berikut ini untuk pengintegralan sering digunakan.

Teorema 10–2. Deret Fourier untuk $f(x)$ dapat diintegralan suku demi suku dari a ke x dan deret yang dihasilkan akan konvergen seragam ke $\int_a^x f(u)\,du$ asalkan $f(x)$ kontinu bagian demi bagian pada $-L < x < L$ dan a, x keduanya terletak pada selang ini.

PENDIFFERENSIALAN DAN PENGINTEGRALAN DERET FOURIER

NOTASI KOMPLEKS UNTUK DERET FOURIER

Dengan menggunakan kesamaan Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \text{.............................(10-6)}$$

di sini $i = \sqrt{-1}$ deret Fourier untuk $f(x)$ dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \qquad \text{.........................(10-7)}$$

di mana $$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-in\pi x/L}\, dx \qquad \text{..........................(10-8)}$$

Dalam menuliskan kesamaan (7), kita mengandaikan bahwa syarat Dirichlet berlaku dan selanjutnya $f(x)$ kontinu pada x. Jika $f(x)$ tak kontinu di x, ruas kiri (7) diganti

dengan $$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Soal 1

Uraikanlah $f(x) = x$, $0 < x < 2$ dalam separuh jangkauan (a) deret sinus, (b) deret cosinus,

periode 4

Soal 2

Tulislah kesamaan Parseval yang bersesuaian dengan deret Fourier

$$f(x) = x,\ 0 < x < 2$$

Referensi

1. Discrete Mathematics and its Applications; Kenneth H. Rosen; McGraw Hill; sixth edition; 2007
2. http://p4tkmatematika.org/
3. Kastroud, Erwin Sucipto (Pentj) , Matematika Untuk Teknik , Erlangga , Jakarta 1987

bridge to the future

http://www.eepis-its.edu