

Integrasi Numerik

Politeknik Elektronika Negeri Surabaya

Topik

Ç Integral Reimann

Ç Trapezoida

Ç Simpson 1/3

Ç Simpson 3/8

Ç Kuadratur Gauss 2 titik

Ç Kuadratur Gauss 3 titik

INTEGRASI NUMERIK

- Ç Di dalam kalkulus, terdapat dua hal penting yaitu integral dan turunan(derivative)
- Ç Pengintegralan numerik merupakan alat atau cara yang digunakan oleh ilmuwan untuk memperoleh jawaban hampiran (aproksimasi) dari pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik.

INTEGRASI NUMERIK

Ç Fungsi yang dapat dihitung integralnya :

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

Ç Fungsi yang rumit misal :

$$\int_0^2 \frac{2 + \cos(1 + x^{3/2})}{\sqrt{1 + 0.5 \sin x}} e^{0.5x} dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \ln |x| dx = x \ln |x| - x + C$$

INTEGRASI NUMERIK

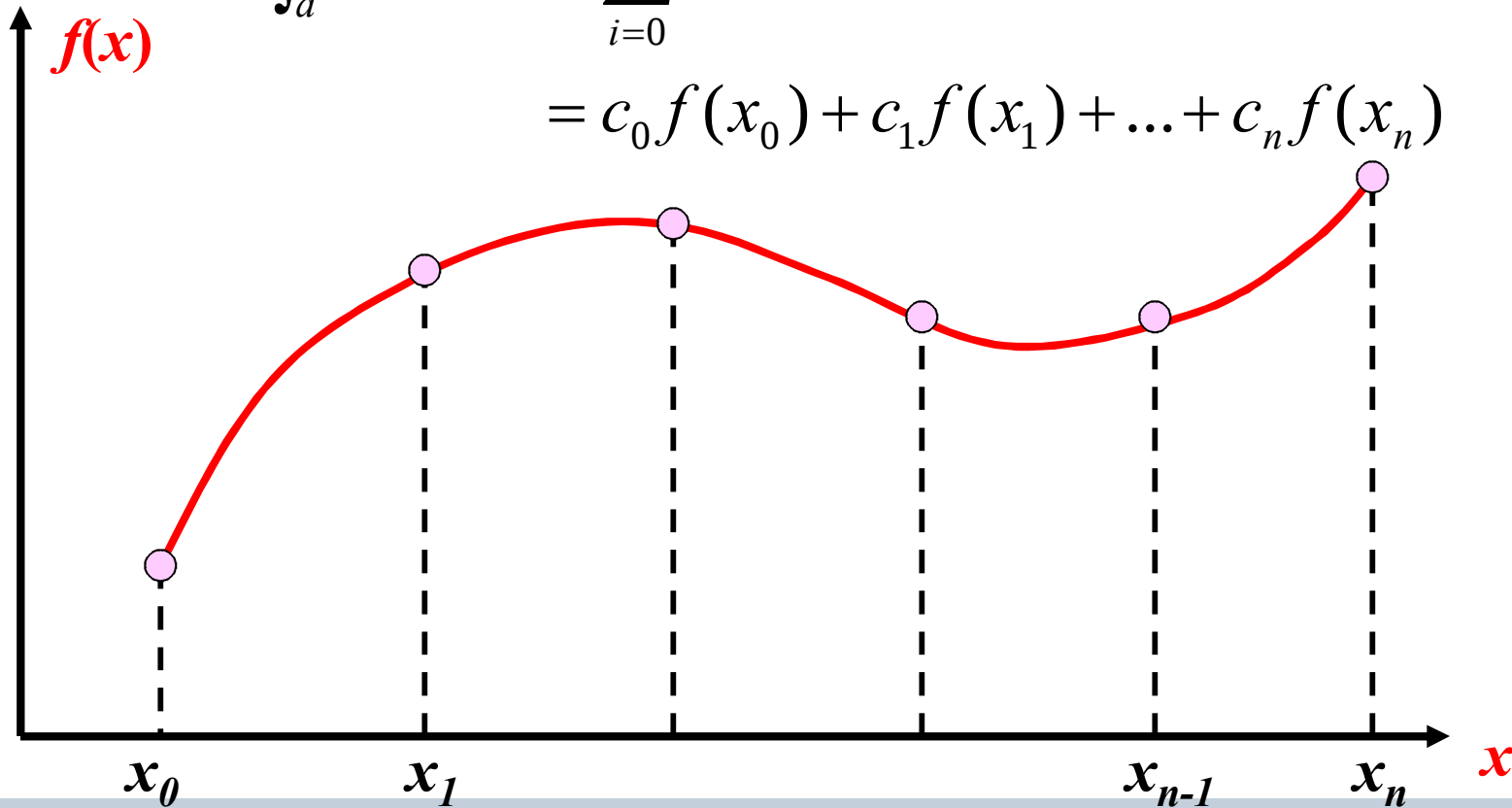
- Ç Perhitungan integral adalah perhitungan dasar yang digunakan dalam kalkulus, dalam banyak keperluan.
- Ç digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = f(x)$ dan sumbu x .
- Ç Penerapan integral : menghitung luas dan volume-volume benda putar

Integrasional Numerik

➤ Penjumlahan berbobot dari nilai fungsi

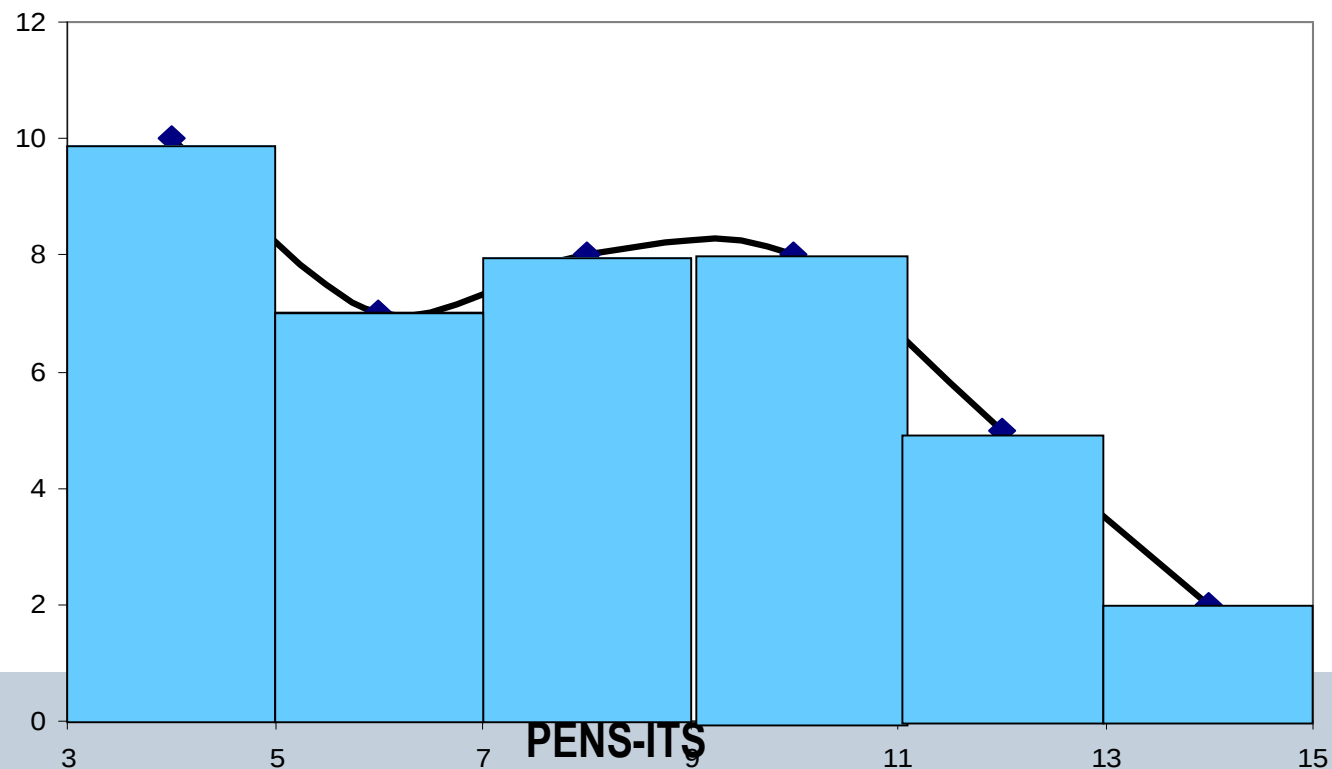
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i)$$

$$= c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n)$$



Pengintegralan Numerik

- Ç Melakukan pengintegralan pada bagian-bagian kecil, seperti saat awal belajar integral $\hat{n}$ penjumlahan bagian-bagian.
- Ç Metode Numerik hanya mencoba untuk lebih cepat dan lebih mendekati jawaban eksak.



Dasar Pengintegralan Numerik

Formula Newton-Cotes

- Berdasarkan pada

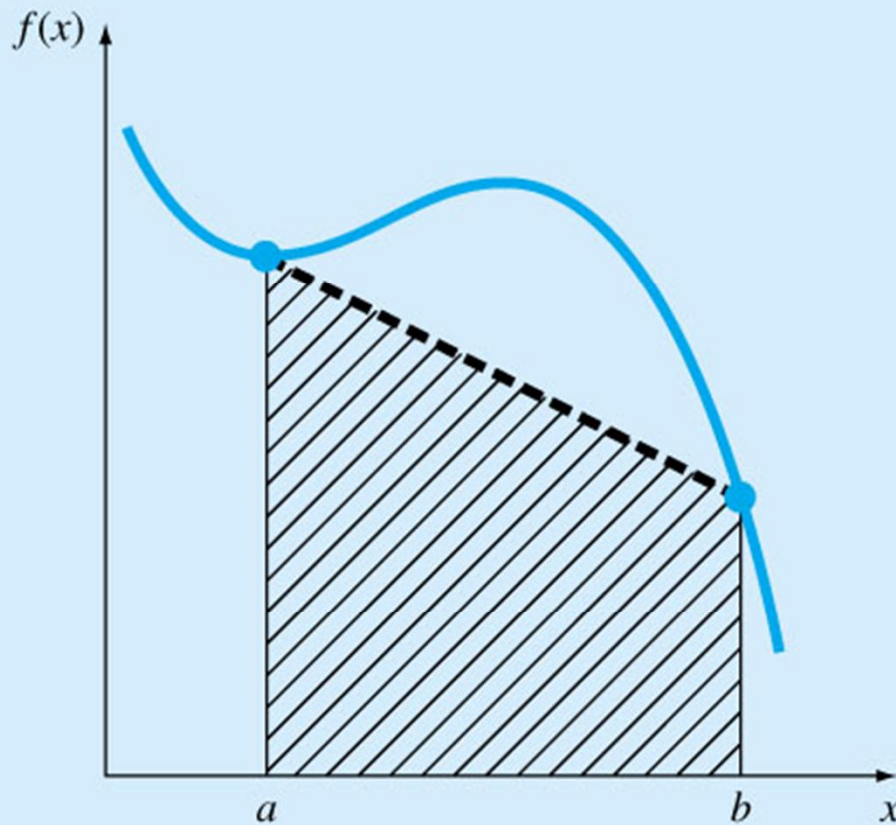
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

➤ Nilai hampiran $f(x)$ dengan polinomial

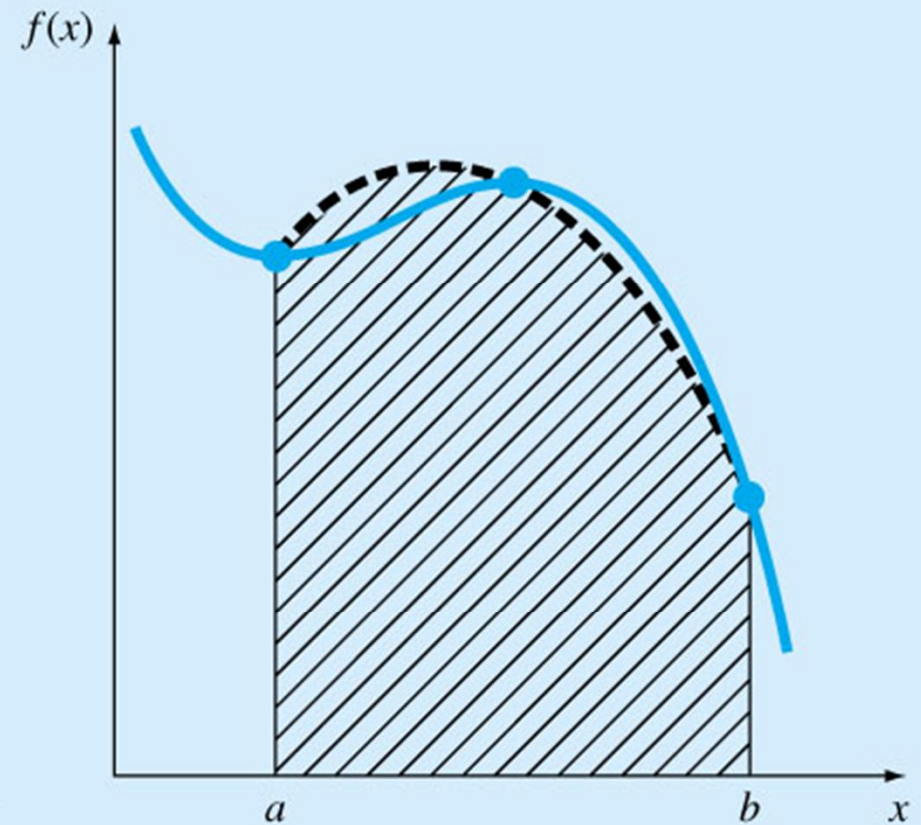
$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

bisa fungsi linear

➤ $f_n(x)$ bisa fungsi kuadrat



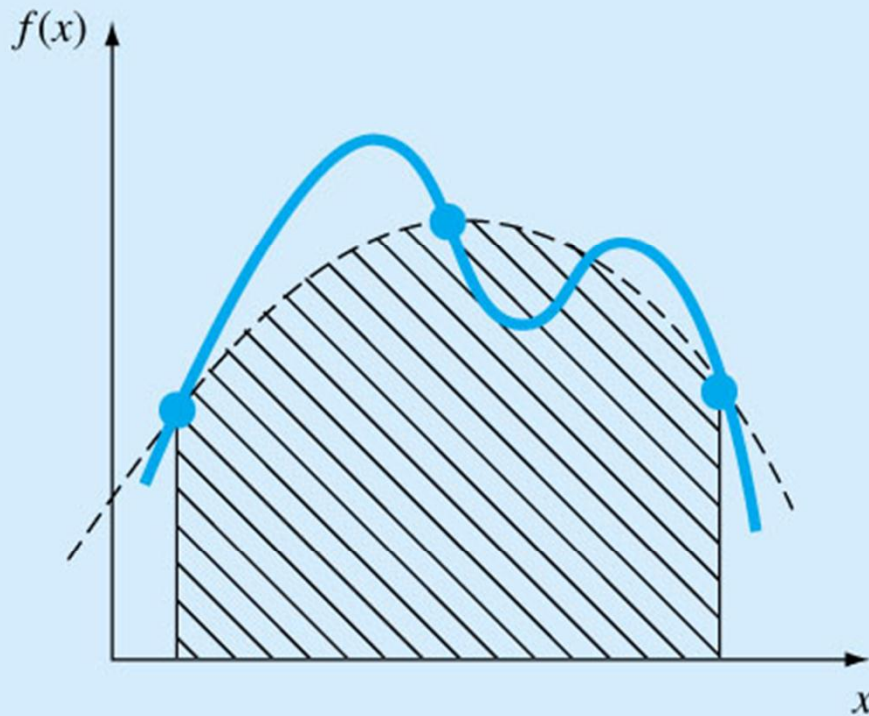
(a)



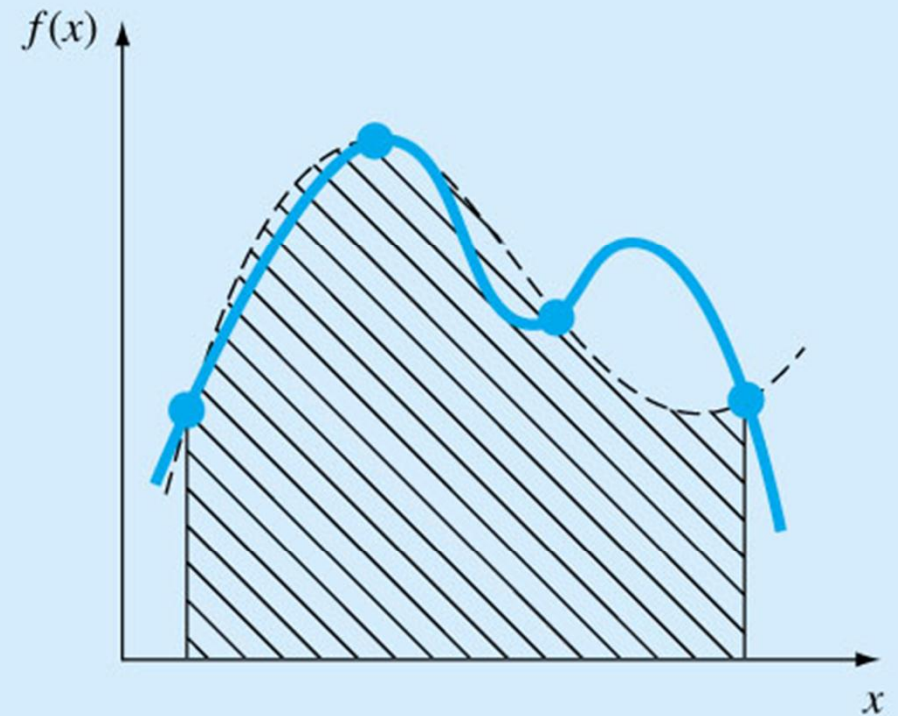
(b)



sa juga fungsi kubik atau
polinomial yang lebih tinggi



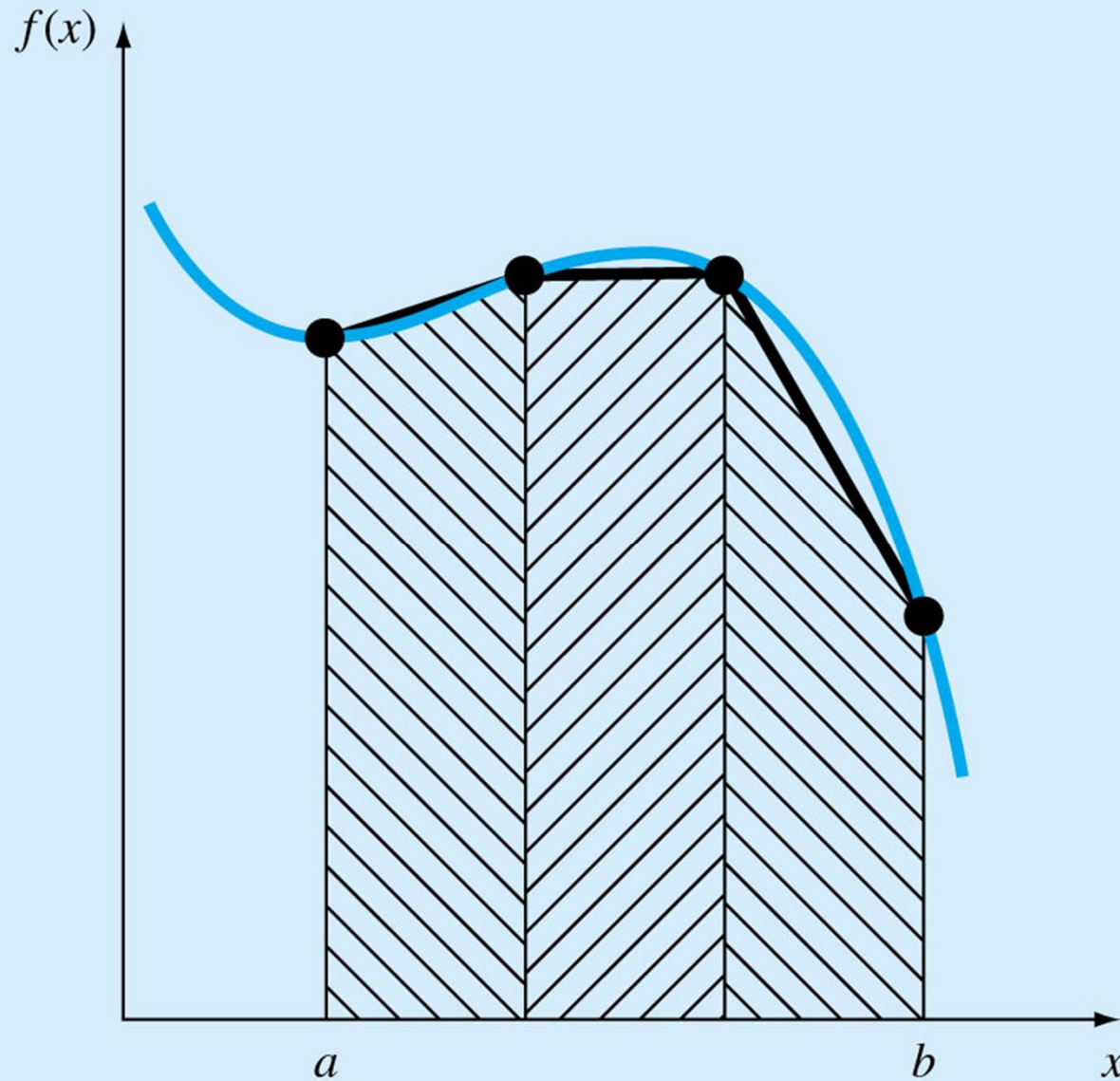
(a)



(b)



al dapat didasarkan pada data

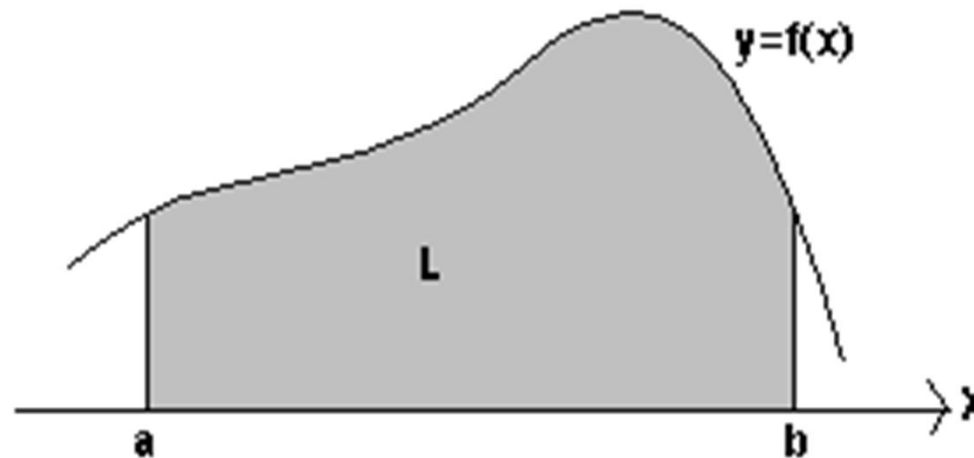


INTEGRASI NUMERIK

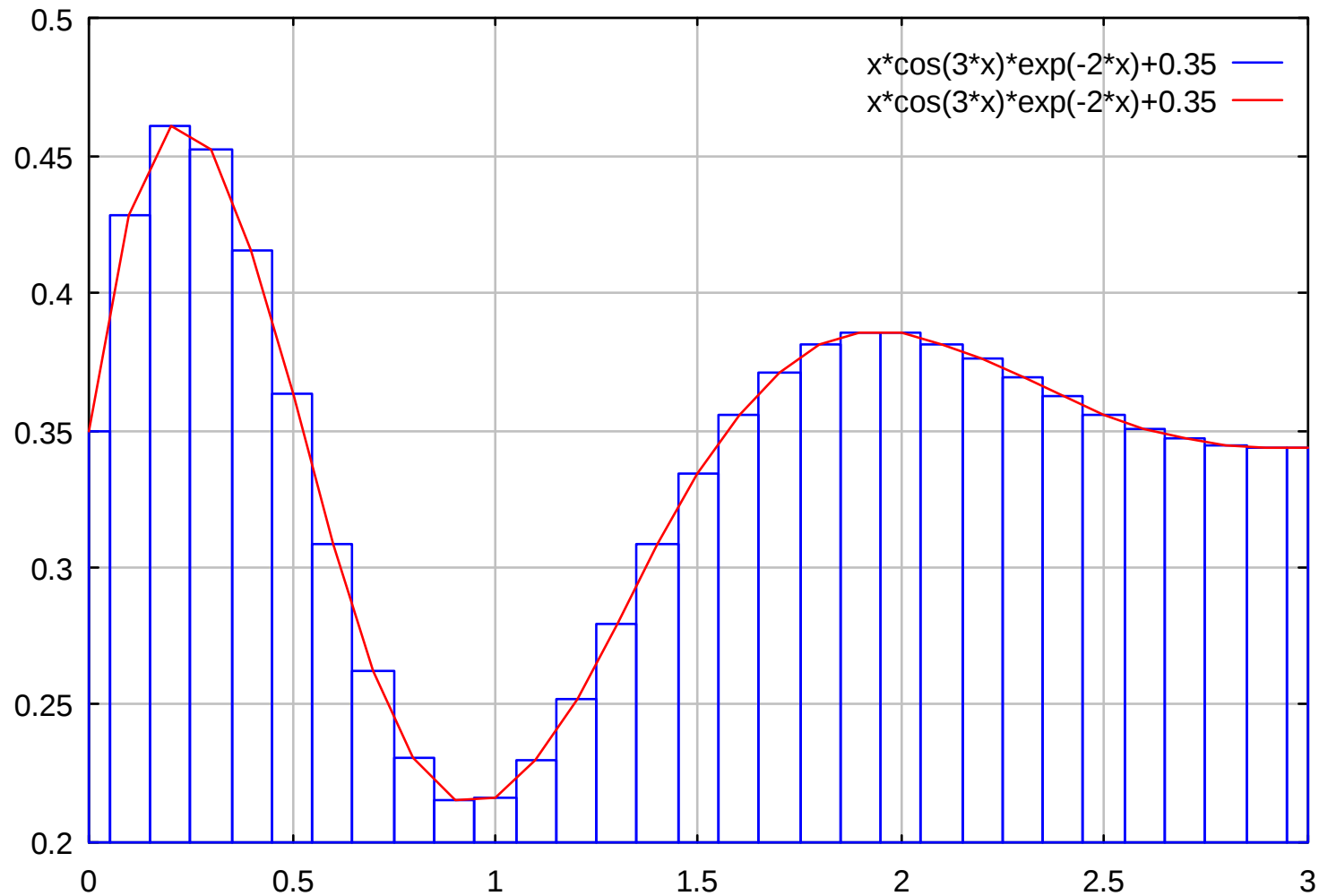
↳ Luas daerah yang diarsir
L dapat dihitung dengan

:

$$\text{↳ } L = \int_a^b f(x) dx$$



Metode Integral Reimann



Metode Integral Reimann

- Ç Luasan yang dibatasi $y = f(x)$ dan sumbu x
- Ç Luasan dibagi menjadi N bagian pada range $x = [a, b]$
- Ç Kemudian dihitung L_i : luas setiap persegi panjang dimana $L_i = \Delta x_i \cdot f(x_i)$

Metode Integral Reimann

Ç Luas keseluruhan adalah jumlah L_i dan dituliskan :

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n \\ &= f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

Ç Dimana $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = h$

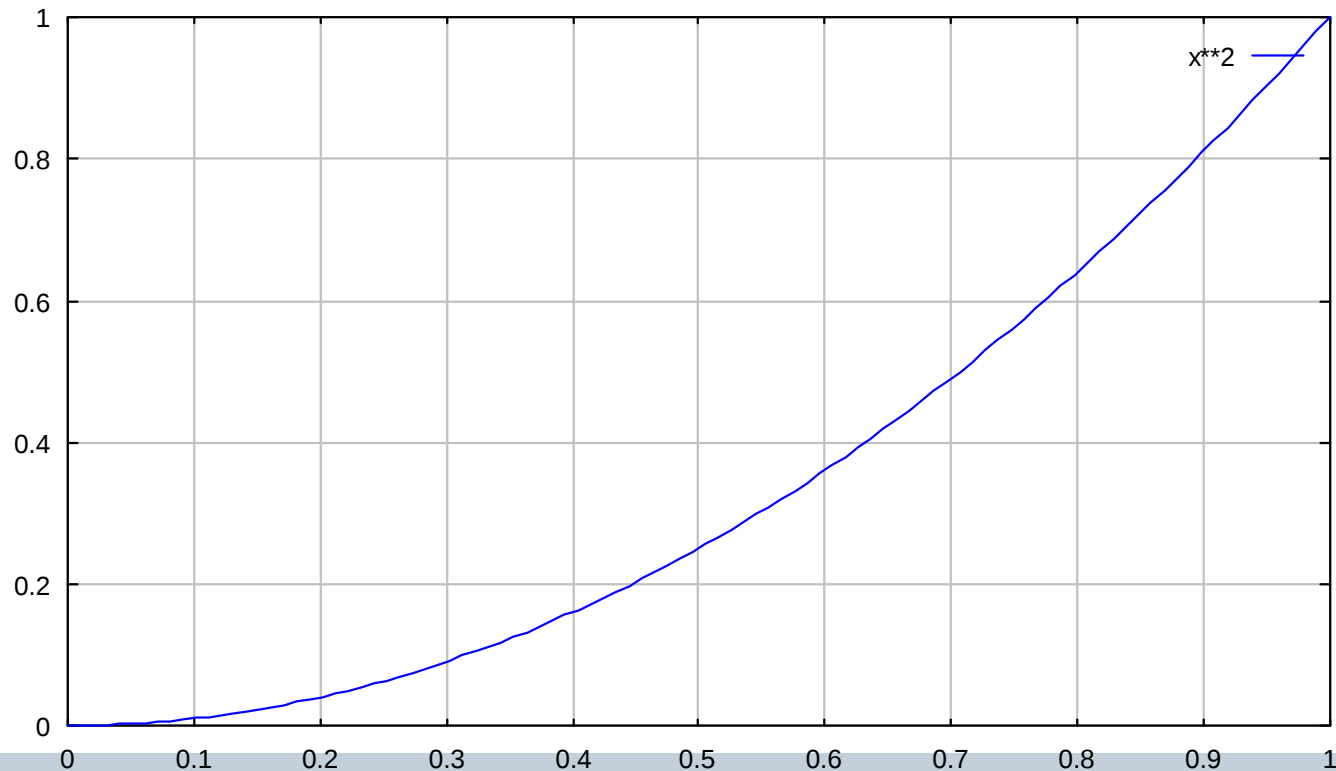
Ç Didapat

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^n f(x_i)$$

Contoh

$$L = \int_0^1 x^2 dx$$

Ç Hitung luas yang dibatasi $y = x^2$ dan sumbu x
untuk range $x = [0,1]$



Contoh

Ç Dengan mengambil $h=0.1$ maka diperoleh tabel :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1

$$\begin{aligned}
 L &= h \cdot \sum_{i=0}^{10} f(x_i) \\
 &= 0.1(0 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25 + 0.36 + 0.49 + 0.64 + 0.81 + 1.00) \\
 &= (0.1)(3.85) = 0.385
 \end{aligned}$$

Ç Secara kalkulus :

$$L = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = 0.3333....$$

Ç Terdapat kesalahan $e = 0.385 - 0.333$

Ç $= 0.052$

Algoritma Metode Integral Reimann

- Ç Definisikan fungsi $f(x)$
- Ç Tentukan batas bawah dan batas atas integrasi
- Ç Tentukan jumlah pembagi area N
- Ç Hitung $h=(b-a)/N$
- Ç Hitung

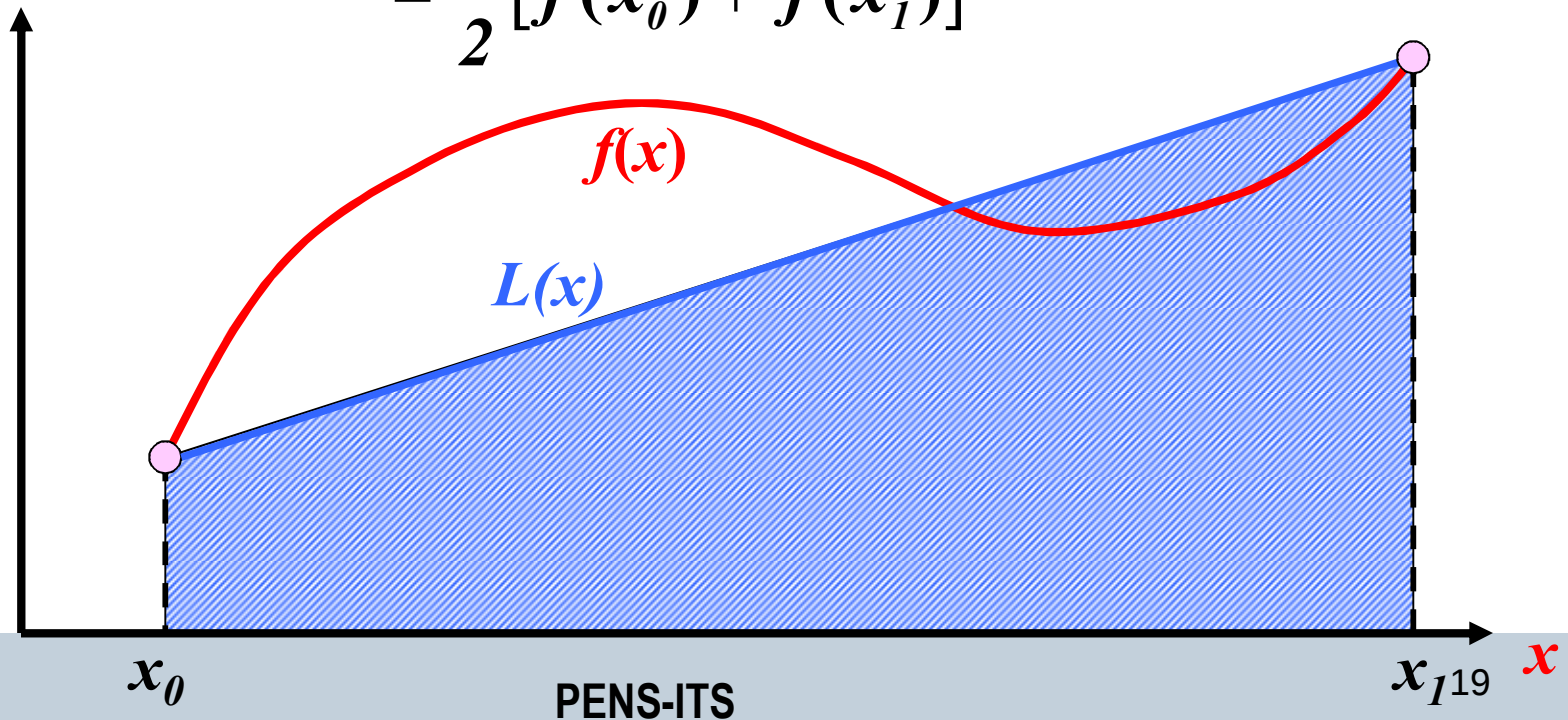
$$L = h \cdot \sum_{i=0}^N f(x_i)$$

Metode Integrasi Trapezoida

Ç Aproximasi garis lurus (linier)

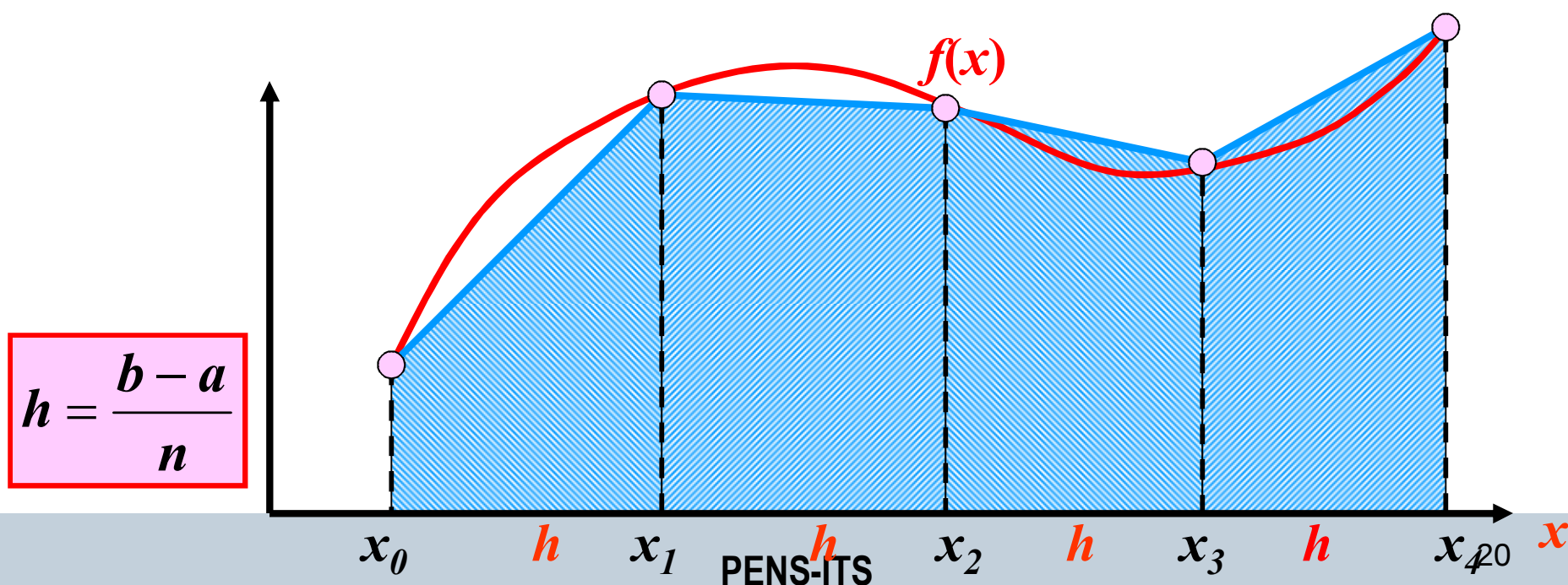
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^1 c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$



Komposisi Trapesium

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\end{aligned}$$



metode Integrasi Trapezoida

$$L_i = \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).\Delta x_i$$

atau

$$L_i = \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}).\Delta x_i$$

$$L = \sum_{i=0}^{\eta-1} L_i$$

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h(f_i + f_{i+1}) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

$$L = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

Algoritma Metode Integrasi Trapezoida

- Ç Definisikan $y=f(x)$
- Ç Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
- Ç Tentukan jumlah pembagi n
- Ç Hitung $h=(b-a)/n$
- Ç Hitung

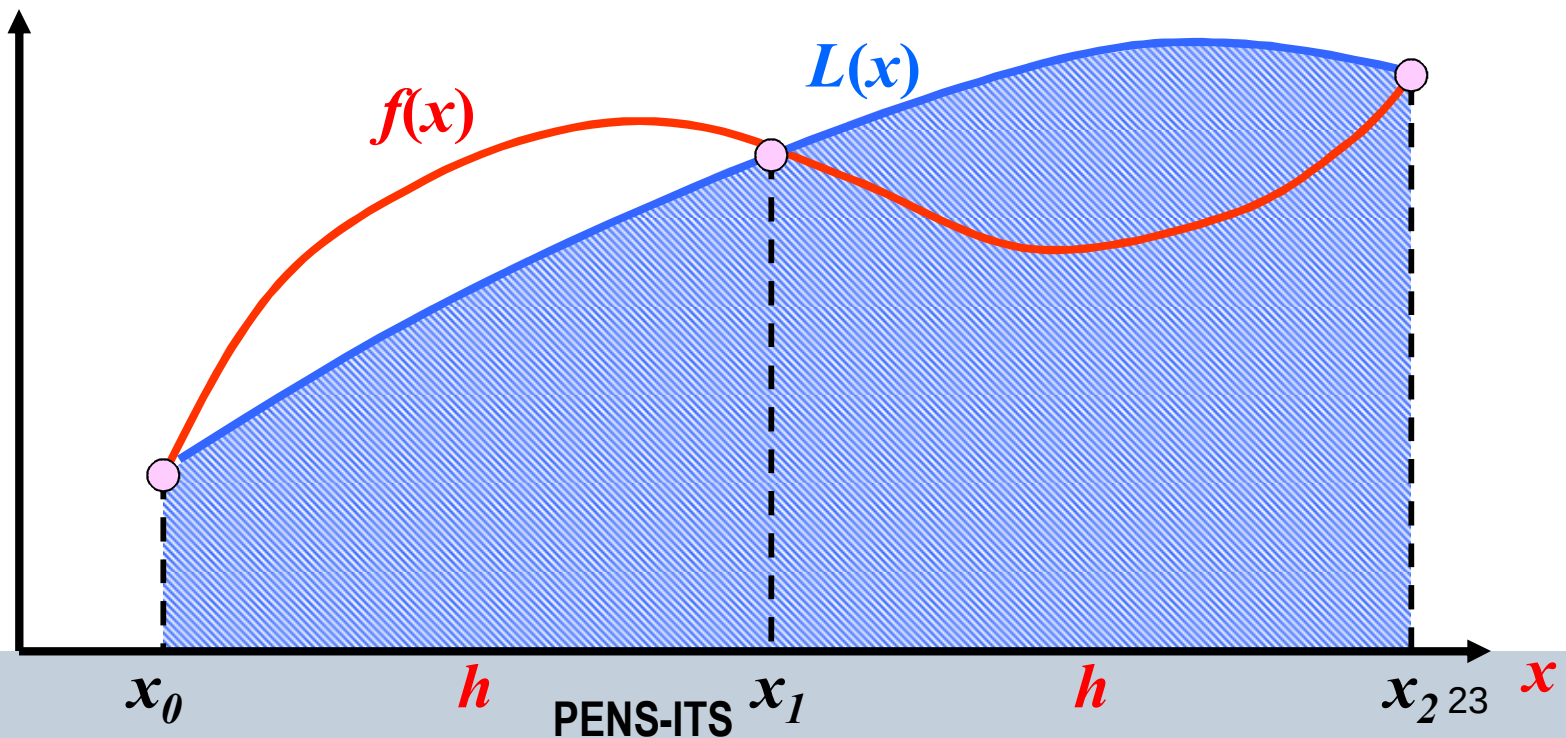
$$L = \frac{h}{2} \left(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

ran Simpson 1/3

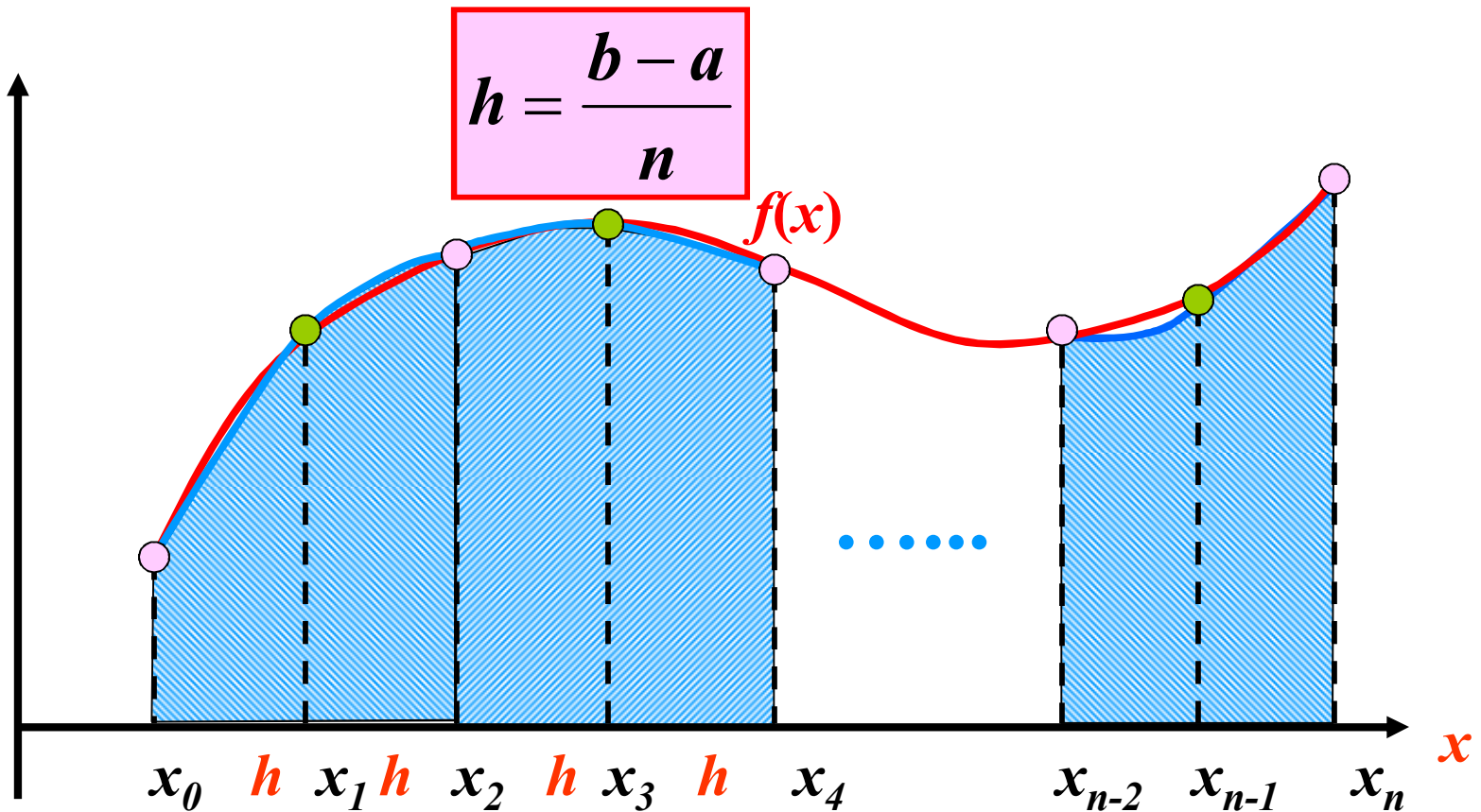
Ç Aproksimasi dengan fungsi parabola

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^2 c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$



Aturan Komposisi Simpson



Metode Integrasi Simpson 1/3

Ç Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi $y=f(x)$ dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

$$N = 0 - n$$

$$L = L1 + L2 + L3 + \dots + Ln$$

$$L = \frac{h}{3}(f_0 + 2f_1) + \frac{h}{3}(2f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 2f_3) + \frac{h}{3}(2f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 2f_{n-1}) + \frac{h}{3}(2f_{n-1} + f_n)$$

Ç atau dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i \text{ ganjil}} f_i + 2 \sum_{i \text{ genap}} f_i + f_n \right)$$

Ç Disyaratkan **jml pias (n) genap**

Cara II

(Buku Rinaldi Munir)

Ç Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga titik tsb

$$p_2x = f(x_0) + \frac{x}{h} \Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f(x_0) = f_0 + \frac{x}{h} f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f_0$$



Polinom Interpolasi Newton Gregory

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
x_3	f_3	Δf_3			
x_4	f_4				

Lambang Δ menyatakan selisih maju. Arti setiap simbol di dalam tabel adalah:

$$f_0 = f(x_0) = y_0$$

$$f_1 = f(x_1) = y_1$$

...

$$f_4 = f(x_4)$$

$$\text{Notasi: } f_p = f(x_p)$$



Polinom Interpolasi Newton Gregory

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1$$

...

$$\Delta f_3 = f_4 - f_3$$

$$\text{Notasi: } \Delta f_p = f_{p+1} - f_p$$

Bentuk Umum

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$$

$$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1$$

$$\Delta^2 f_2 = \Delta f_3 - \Delta f_2$$

$$\text{Notasi: } \Delta^2 f_p = \Delta f_{p+1} - \Delta f_p$$

$$\Delta^{n+1} f_p = \Delta^n f_{p+1} - \Delta^n f_p, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$$

$$\Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$$

$$\text{Notasi: } \Delta^3 f_p = \Delta^2 f_{p+1} - \Delta^2 f_p$$

Cara II (Buku Rinaldi Munir hlm 285)

Ç Integrasikan $p_2(x)$ pd selang $[0, 2h]$

$$L = \int_0^{2h} f(x) dx = \int_0^{2h} p_2(x) dx$$

$$L = \int_0^{2h} \left(f_0 + \frac{x}{h} \Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2} \Delta^2 f_0 \right) dx$$

$$L = f_0 x + \frac{x^2}{2h} \Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h^2} \right) \Delta^2 f_0 \Big|_{x=0}^{x=2h}$$

$$L = 2hf_0 x + \frac{4h^2}{2h} \Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h} \right) \Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 x + 2h \Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h \right) \Delta^2 f_0$$

$$L = 2hf_0 x + 2h \Delta f_0 + \frac{h}{3} \Delta^2 f_0$$

Cara II

(Buku Rinaldi Munir hlm 286)

Ç Mengingat

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

Ç Maka selanjutnya

$$L = 2hf_0x + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$L = 2hf_0x + 2hf_1 - 2hf_0 + \frac{h}{3}f_2 - \frac{2h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_0$$

$$L = \frac{h}{3}f_0 + \frac{4h}{3}f_1 + \frac{h}{3}f_2$$

$$L = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

Kaidah Simpson 1/3 (total)

$$\begin{aligned}
 L_{\text{total}} &= \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\
 &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \\
 &\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n)
 \end{aligned}$$

Ç Disyaratkan jumlah pias (n) harus genap

Contoh

Ç Hitung integral $\int_0^1 2x^3 dx$

$$L_{\text{total}} \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n)$$

$$\begin{aligned}
 L_{\text{total}} &= 0.1/3 * (f(0) + 2*f(1) + 2*f(2) + \dots + 2*f(9) + f(10)) \\
 &= 0.1/3 * (0 + 0.002 + 0.16 + 0.54 + 0.128 + 0.25 + 0.432 \\
 &\quad + 0.686 + 1.024 + 1.458 + 2) \\
 &= 0.333333 * 6.68 \\
 &= 2.22666444
 \end{aligned}$$

CA "H:\2008-2009\Me... - □ ×

INTEGRASI NUMERIK
SIMSON 1/3

f(x) = 2*x^3
 Batas bawah : 0
 Batas atas : 1
 Jumlah pias : 10

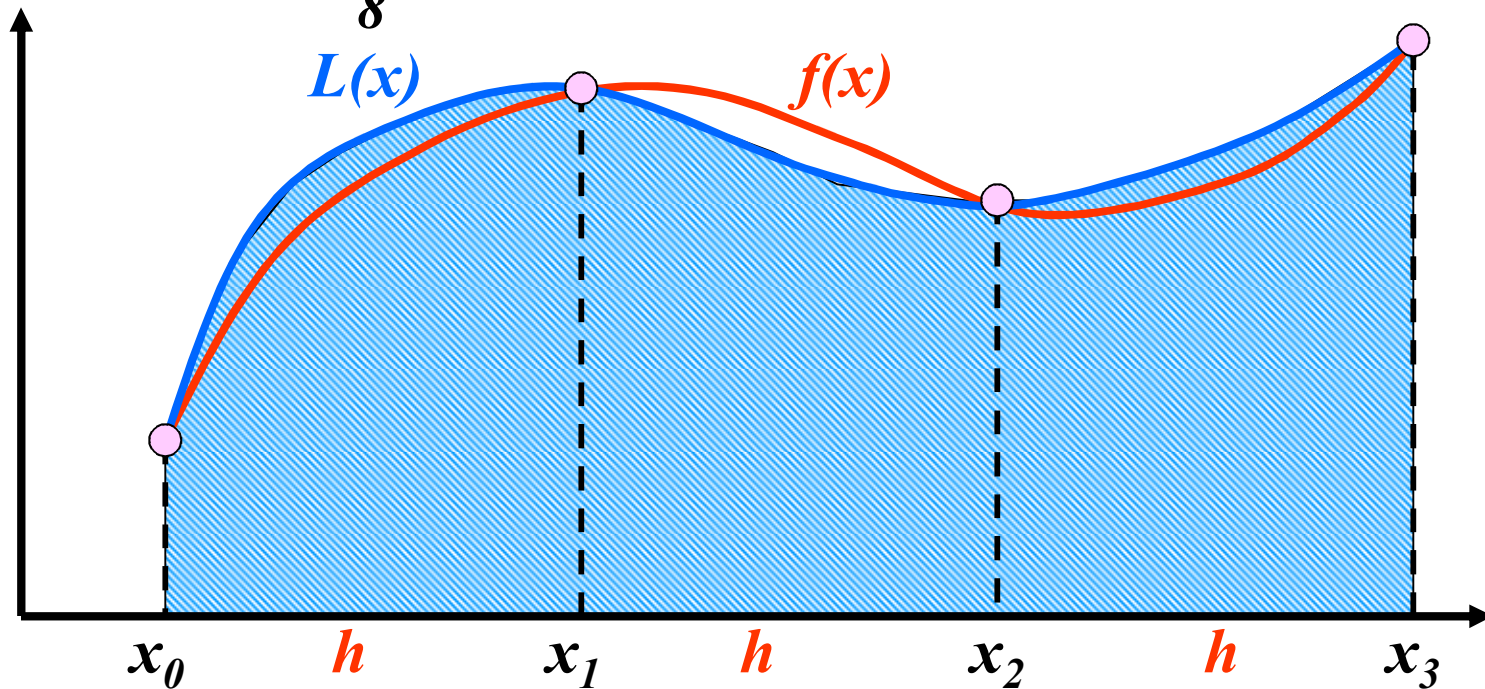
i	x	f(x)
0	0	0
1	0.1	0.002
2	0.2	0.016
3	0.3	0.054
4	0.4	0.128
5	0.5	0.25
6	0.6	0.432
7	0.7	0.686
8	0.8	1.024
9	0.9	1.458
10	1	2

ran Simpson 3/8

➤ Aproksimasi dengan fungsi kubik

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^3 c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$



Metode Integrasi

Simpson 3/ 8

Ç Dengan menggunakan aturan simpson, luas dari daerah yang dibatasi fungsi $y=f(x)$ dan sumbu X dapat dihitung sebagai berikut:

$$N = 0 - n$$

$$L = L1 + L2 + L3 + \dots + Ln$$

$$L = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + \frac{3}{8}h(f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6) + \frac{3}{8}h + \dots + \frac{3}{8}h(f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$

Ç atau dapat dituliskan dengan:

$$L = \frac{3}{8}h \left(f_0 + 2 \sum_{i \% 3 = 0}^{n-1} f_i + 3 \sum_{i \% 3 \neq 0}^{n-1} f_i + f_n \right)$$

Latihan Soal

Ç Hitung Integral dengan menggunakan

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$$

- ñ Integral Reimann
- ñ Integrasi Trapezoida
- ñ Integrasi Simpson 1/3 dan 3/8

Metode Integrasi Gauss

- Ç Metode Newton-Cotes (Trapezoida, Simpson)
 - berdasarkan titik-titik data diskrit. Dengan batasan :
 - ñ h sama
 - ñ Luas dihitung dari a sampai b
- Ç Mengakibatkan error yang dihasilkan cukup besar.

Metode Integrasi Gauss

Ç Misal menghitung Luas dengan metode trapezoida dengan selang $[-1,1]$

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f(1) + f(-1)) \approx f(1) + f(-1)$$

$$h = 1 - (-1) = 2$$

Ç Persamaan ini dapat ditulis (disebut pers Kuadratur Gauss)

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Ç Misal $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ dan $c_1 = c_2 = h/2 = 1 \rightarrow$ menjadi metode trapezoida

Ç Karena x_1 , x_2 , c_1 dan c_2 sembarang maka kita harus memilih nilai tersebut sehingga error integrasinya minimum

Metode Integrasi Gauss

- Ç Bagaimana mencari x_1 , x_2 , c_1 dan c_2 ? Karena ada 4 perubah yang tidak diketahui, maka harus ada 4 persamaan simultan yang mengandung x_1 , x_2 , c_1 dan c_2 .
- Ç Dapat dilihat bahwa nilai integrasi numerik dengan metode trapesium akan tepat (error = 0) untuk fungsi tetap dan fungsi linier.
- Ç Misalnya persamaan-persamaan di bawah ini dijadikan fungsi integral pada interval integrasi $[-1, 1]$
- Ç $f(x) = 1$; $f(x) = x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$

Metode Integrasi Gauss

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_{-1}^1 1 dx = x \Big|_{x=-1}^{x=1} = 1 - (-1) = 2 = c_1 + c_2$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_{-1}^1 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2} (1)^2 - \frac{1}{2} (-1)^2 = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3} (1)^3 - \frac{1}{3} (-1)^3 = \frac{2}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{4} (1)^4 - \frac{1}{4} (-1)^4 = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3$$

Sekarang sudah didapatkan 4
persamaan simultan sbb :

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$$

apabila dipecahkan
menghasilkan

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350269$$

$$x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -0.577350269$$

Sehingga :

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Metode Integrasi Gauss

Ç Persamaan dibawah ini dinamakan metode Gauss Legendre 2 titik

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ç Dengan kaidah ini, menghitung integral $f(x)$ di dalam selang $[-1, 1]$ cukup hanya dengan mengevaluasi nilai fungsi f di $x = 1/\sqrt{3}$ dan $x = -1/\sqrt{3}$

Transformasi

$$L_i = \int_a^b f(x) dx \longrightarrow L_i = \int_{-1}^1 f(u) du$$

Ç Range $[a,b]$ $\rightarrow$ $[-1,1]$

Ç x $\rightarrow$ u

Ç $f(x)$ $\rightarrow$ $f(u)$

Ç dx $\rightarrow$ du



Transformasi

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{u+1}{2}$$

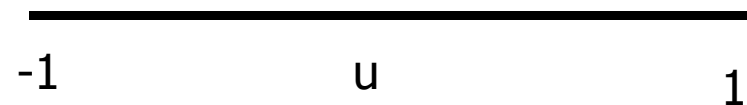
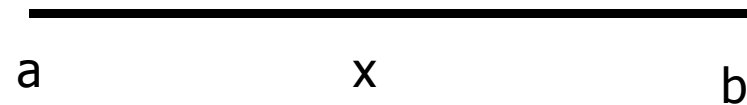
$$2x - 2a = (u+1)(b-a)$$

$$2x = (u+1)(b-a) + 2a$$

$$x = \frac{b-a+bu-au+2a}{2}$$

$$x = \frac{(b+a)}{2} + \frac{(b-a)}{2}u$$

$$dx = \frac{1}{2}(b-a)du$$



Transformasi

$$L_i = \int_{-1}^1 f(u) du = \int_a^b f(x) dx$$

$$f(u) du = f\left(\frac{(b-a)}{2}u + \frac{(b+a)}{2}\right) \frac{1}{2}(b-a) du$$

$$\int_{-1}^1 f(u) du = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 f\left(\frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2}u\right) du$$

Analisa

- Ç Dibandingkan dengan metode Newton-Cotes (Trapezoida, Simpson 1/3, 3/8) metode Gauss-Legendre 2 titik lebih sederhana dan efisien dalam operasi aritmatika, karena hanya membutuhkan dua buah evaluasi fungsi.
- Ç Lebih teliti dibandingkan dengan metode Newton-Cotes.
- Ç Namun kaidah ini harus mentransformasi terlebih dahulu menjadi

$$\int_{-1}^1 f(u) du$$

Algoritma

Integrasi Kuadratur Gauss dgn Pendekatan 2 titik

- (1) Definisikan fungsi $f(x)$
- (2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
- (3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

- (4) Tentukan fungsi $f(u)$ dengan:

$$f(u)du = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

- (5) Hitung: $L = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Hitung integral : $L = \int_0^1 x^2 dx$

Pertama yang harus dilakukan adalah menghitung u, dengan:

$$u = \frac{2x - (b + a)}{(b - a)} = \frac{2x - 1}{1} = 2x - 1$$

$$\text{atau } x = \frac{1}{2}(u + 1) \rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{2}(u + 1)\right)^2$$

Dengan demikian diperoleh fungsi f(u):

$$f(u) du = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(u + 1) \right]^2 = \frac{1}{8}(u + 1)^2$$

$$\int_{-1}^1 f(u) du = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Dengan menggunakan integrasi kuadratur gauss pendekatan 2 titik diperoleh :

$$\begin{aligned} L &= f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 \\ &= 0.311004 + 0.022329 \\ &= 0.33333 \end{aligned}$$

Metode Gauss Legendre 3 Titik

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

- Ç Parameter x_1, x_2, x_3, c_1, c_2 dan c_3 dapat dicari dengan membuat penalaran bahwa kuadratur Gauss bernilai tepat (error = 0) untuk 6 buah fungsi berikut :

$$f(x) = 1; f(x) = x; f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^3; f(x) = x^4; f(x) = x^5$$

- Ç Dengan cara yang sama dengan 2 titik didapatkan

$$c_1 = \frac{5}{9}; c_2 = \frac{8}{9}; c_3 = \frac{5}{9}$$

$$x_1 = -\sqrt{3/5} = -0.774596669$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{3/5} = 0.774596669$$

Metode Gauss Legendre 3 Titik

Sehingga rumus luasannya menjadi :

$$\int_{-1}^1 f(u) du = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

na Metode Integrasi Gauss dengan Pendekatan 3 Titik

-
- (1) Definisikan fungsi $f(x)$
 - (2) Tentukan batas bawah (a) dan batas atas integrasi (b)
 - (3) Hitung nilai konversi variabel :

$$x = \frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)$$

- (4) Tentukan fungsi $g(u)$ dengan:

$$g(u) = \frac{1}{2}(b-a)f\left(\frac{1}{2}(b-a)u + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

- (5) Hitung:

$$L = \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{5}{9}g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Metode Gauss n-Titik

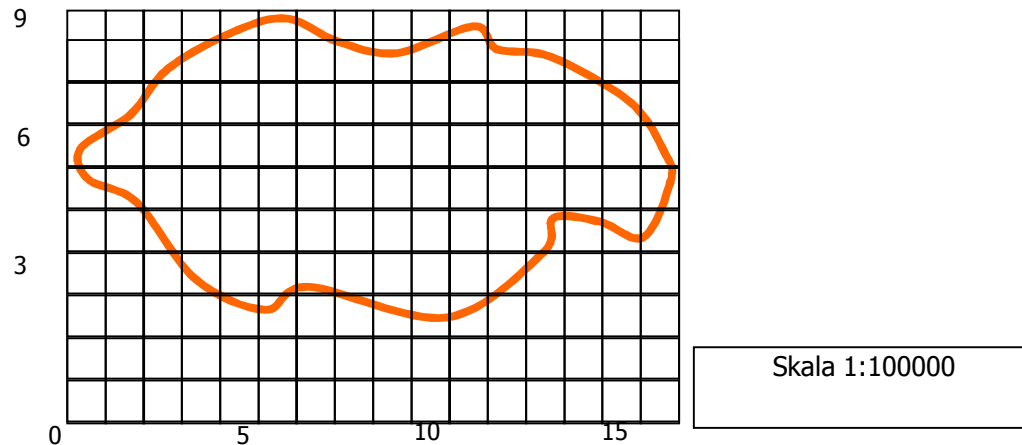
Titik (n)	(k)	Bobot ($w_{n,k}$)	Absis ($x_{n,k}$)	Galat pemotongan
2	1	1.000000000	-0.577350269	$= f^{(4)}(\xi)$
	2	1.000000000	0.577350269	
3	1	0.555555556	-0.774596669	$= f^{(6)}(\xi)$
	2	0.888888889	0.000000000	
	3	0.555555556	0.774596669	
4	1	0.347854845	-0.861136312	$= f^{(8)}(\xi)$
	2	0.652145155	-0.339981044	
	3	0.652145155	0.339981044	
	4	0.347854845	0.861136312	
5	1	0.236926885	-0.906179846	$= f^{(10)}(\xi)$
	2	0.478628670	-0.538469310	
	3	0.568888889	0.000000000	
	4	0.478628670	0.538469310	
	5	0.236926885	0.906179846	

pa Penerapan Integrasi Numerik

Ç Menghitung Luas Daerah Berdasarkan
Gambar

Ç Menghitung Luas dan Volume Benda Putar

g Luas Daerah Berdasarkan Gambar



- Ç Untuk menghitung luas integral di peta di atas, yang perlu dilakukan adalah menandai atau membuat garis grid pada setiap step satuan h yang dinyatakan dalam satu kotak. Bila satu kotak mewakili 1 mm, dengan skala yang tertera maka berarti panjangnya adalah 100.000 mm atau 100 m.
- Ç Pada gambar di atas, mulai sisi kiri dengan grid ke 0 dan sisi kanan grid ke n (dalam hal ini $n=22$). Tinggi pada setiap grid adalah sebagai berikut:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$y(n)$	0	1	2.5	4.5	6	7	6.5	6	6	6.5	6.5	6	5.5	3.5	3	3	0

menghitung Luas Daerah Berdasarkan Gambar

Ç Dari tabel di atas, luas area dapat dihitung dengan menggunakan 3 macam metode:

Ç Dengan menggunakan metode integrasi Reimann

$$L = h \sum_{i=0}^{16} y_i = 73.5$$

Ç Dengan menggunakan metode integrasi trapezoida

$$L = \frac{h}{2} \left(y_0 + y_{16} + 2 \sum_{i=1}^{15} y_i \right) = 73.5$$

Ç Dengan menggunakan metode integrasi Simpson

$$L = \frac{h}{3} \left(y_0 + y_{16} + 4 \sum_{i=\text{ganjil}} y_i + 2 \sum_{i=\text{genap}} y_i \right) = 74$$

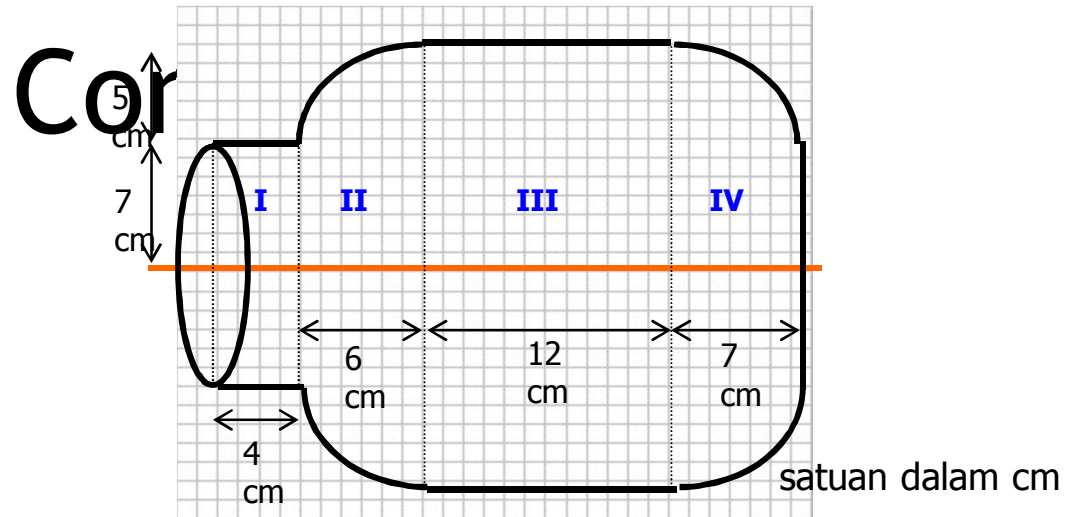
hitung Luas dan Volume Benda Putar

↳ Luas benda putar:

$$L_p = 2\pi \int_a^b f(x) dx$$

↳ Volume benda putar:

$$V_p = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Ç Ruang benda putar dapat dibedakan menjadi 4 bagian

ñ bagian I dan III merupakan bentuk silinder yang tidak perlu dihitung dengan membagi-bagi kembali ruangnya,

ñ bagian II dan IV perlu diperhitungkan kembali.

Ç Bagian I: $L_I = 2\pi(4)(7) = 56\pi$ $V_I = \pi(4)(7)^2 = 196\pi$

Ç Bagian II: $L_{II} = 2\pi(12)(12) = 288\pi$ $V_{II} = 2\pi(12)(12)^2 = 3456\pi$

Contoh :

- Ç Sedangkan untuk menghitung bagian II dan IV diperlukan pembagian area , misalkan dengan mengambil $h=1$ diperoleh:

n	0	1	2	3	4	5
y(n)	7	10	11	11.5	12	12

- Ç Pada bagian II dan IV: $L_{II} = L_{IV}$ dan $V_{II} = V_{IV}$
 Ç Dengan menggunakan integrasi trapezoida dapat diperoleh:

$$L_{II} (L_{IV}) = 2\pi \frac{h}{2} \left[y_0 + y_5 + 2 \sum_{i=1}^4 y_i \right] = 108\pi$$

$$V_{II} (= V_{IV}) = \pi \frac{h}{2} \left[y_0^2 + y_5^2 + 2 \sum_{i=1}^4 y_i^2 \right] = 1187.5\pi$$

Contoh :

Ç Luas permukaan dari botol adalah: $L = L_I + L_{II} + L_{III} + L_{IV}$

$$= 56\pi + 108\pi + 288\pi + 108\pi$$
$$= 560\pi$$
$$= 1758.4$$

Ç Luas = 1758.4 cm²

Ç Volume botol adalah:

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV}$$
$$= 196\pi + 1187.5\pi + 3456\pi + 1187.5\pi$$
$$= 6024\pi$$

Ç Volume = 18924.78 cm³