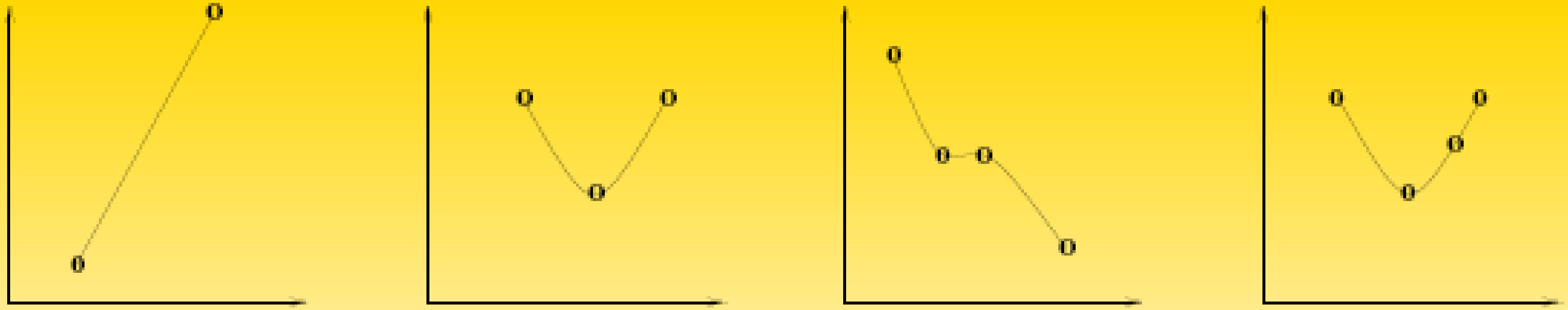
Interpolasi

Interpolasi

Andaikan kita memiliki tabulasi data yang terbebas dari kesalahan dan ingin menaksir harga(-harga) yang terletak *di antara titik-titik data* dalam tabel. Metode yang digunakan untuk maksud tersebut adalah *interpolasi*.

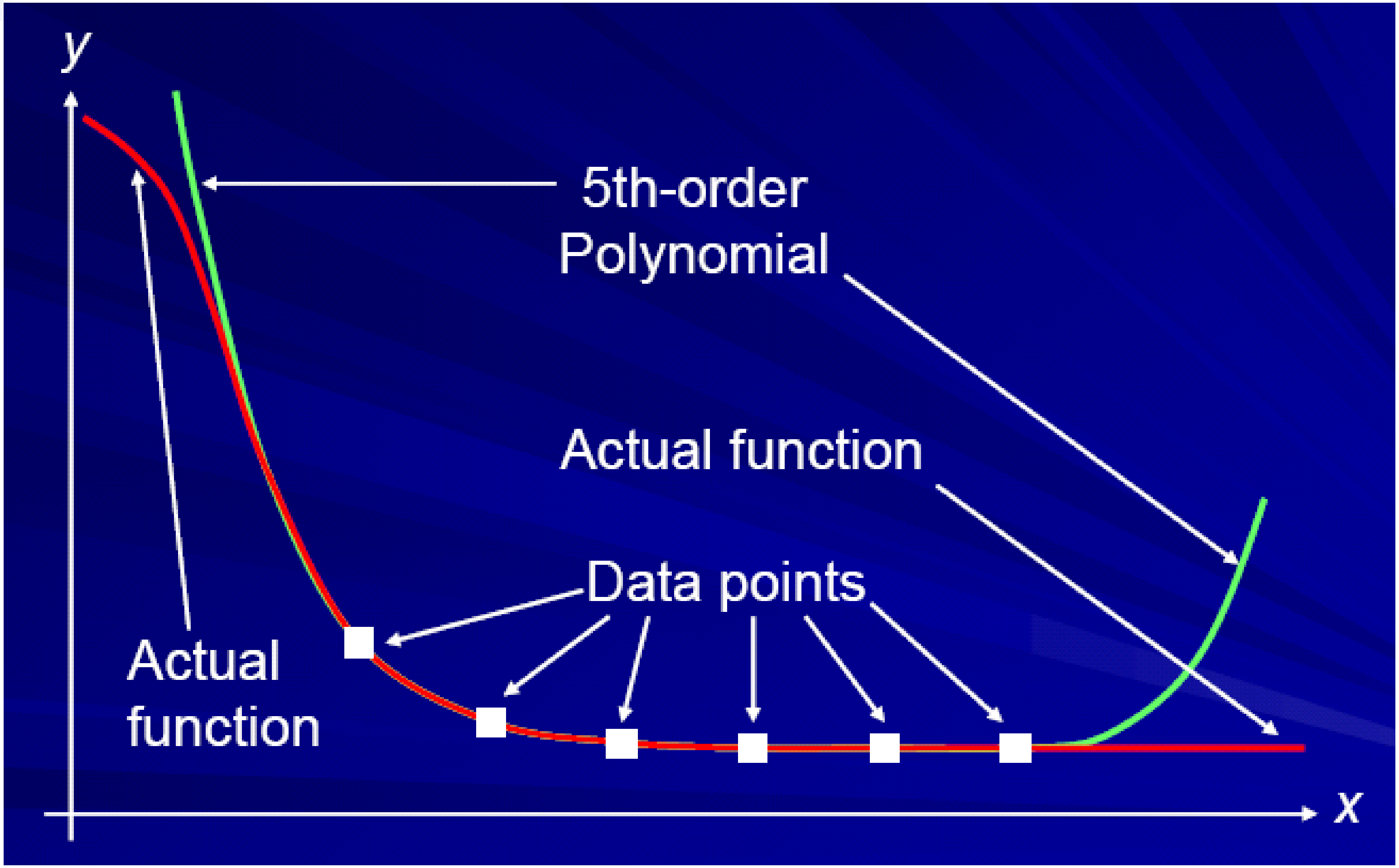
Untuk $(n+1)$ titik data, *ada satu dan hanya satu polinom* yang melewati semua titik data (derajat polinom n atau kurang dari n).



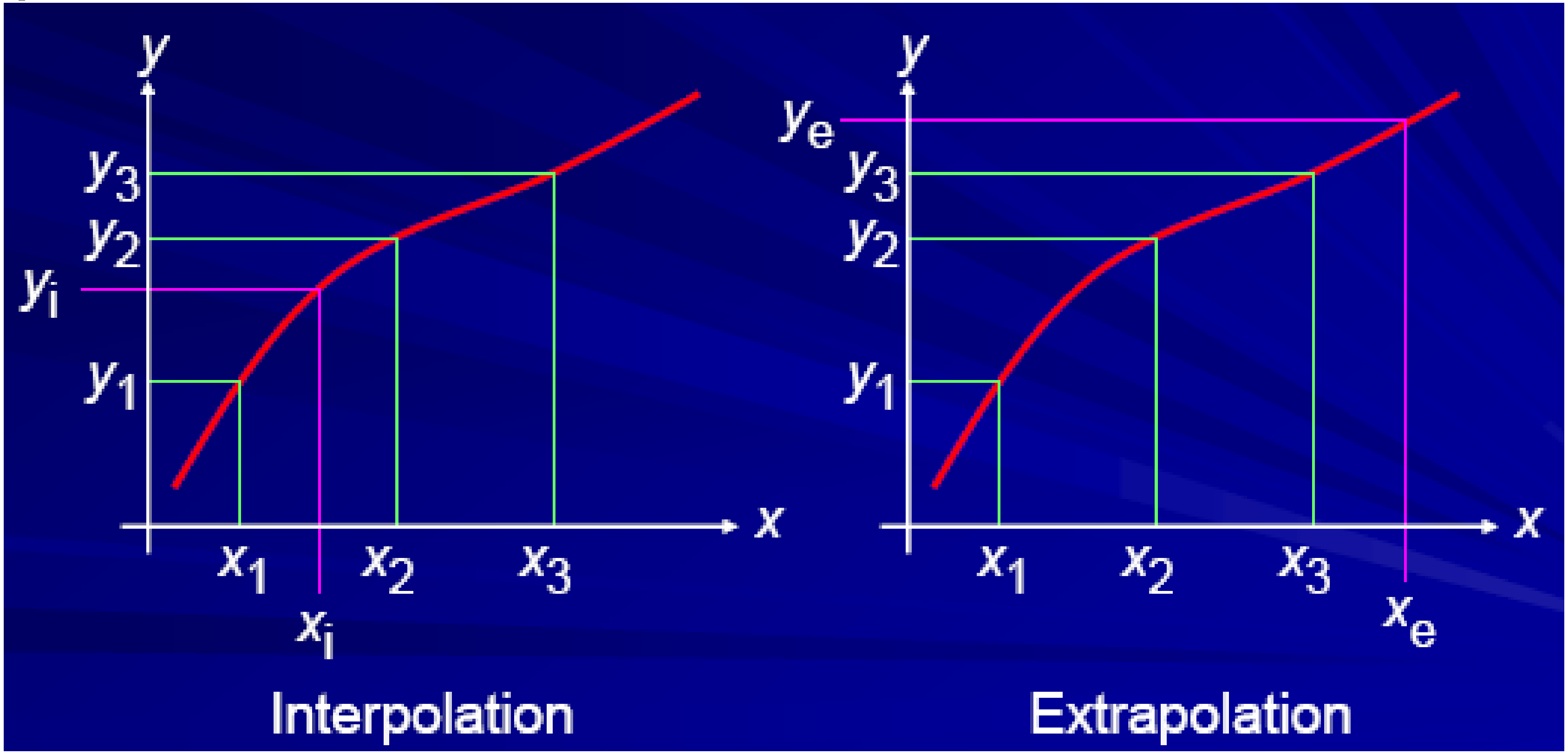
(a) (b) (c) (d)

Interpolasi berbeda dengan ekstrapolasi, dimana yang kedua digunakan untuk menaksir

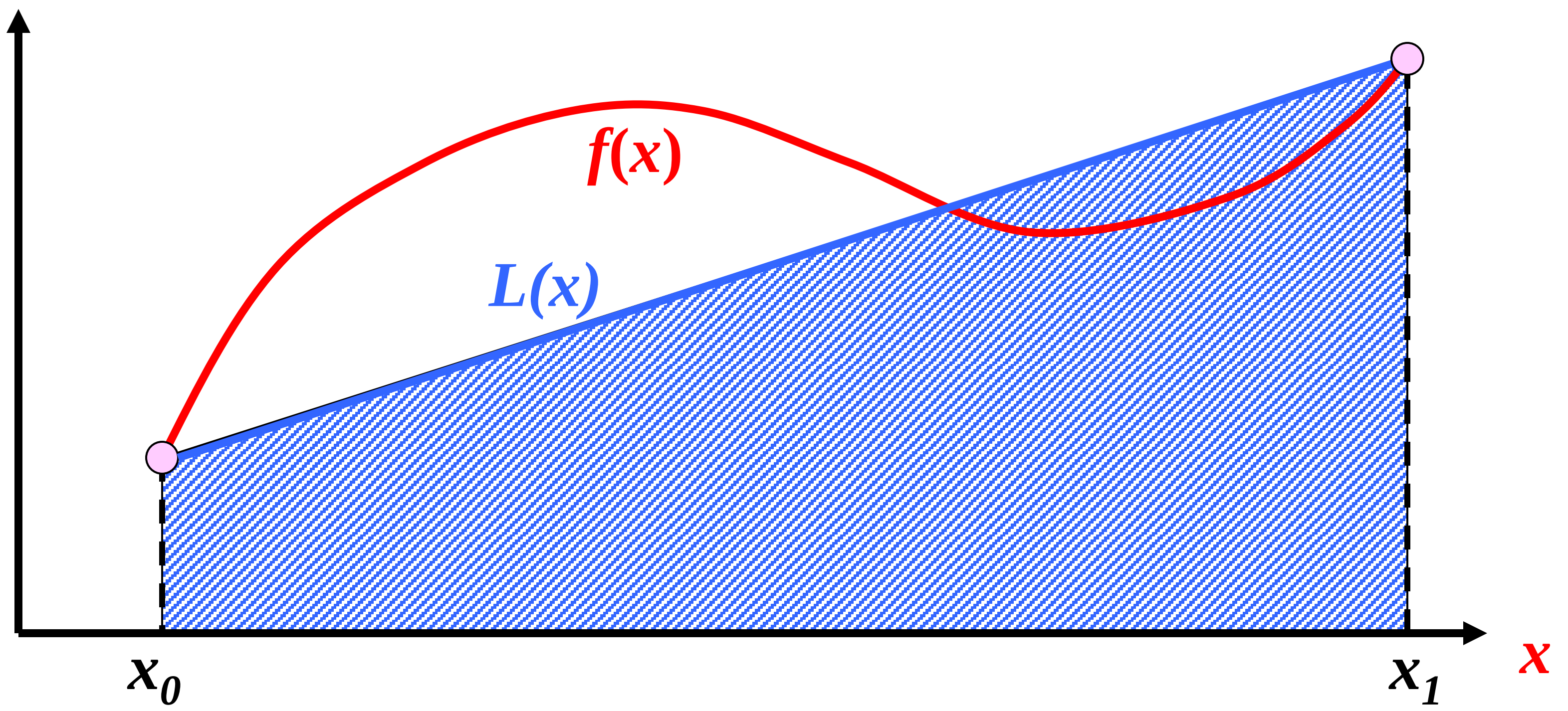
Interpolasi



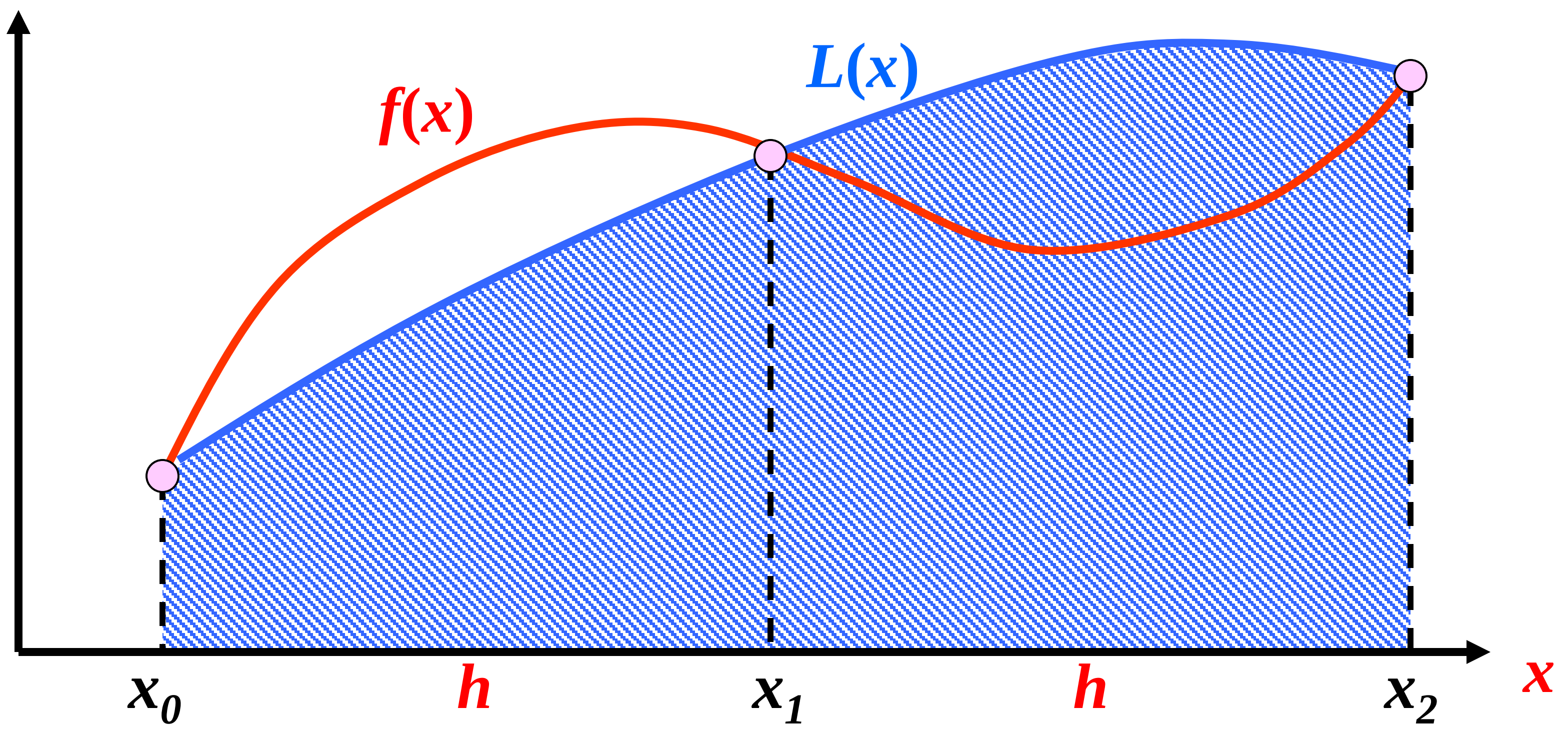
Perbedaan Interpolasi dan Ekstrapolasi



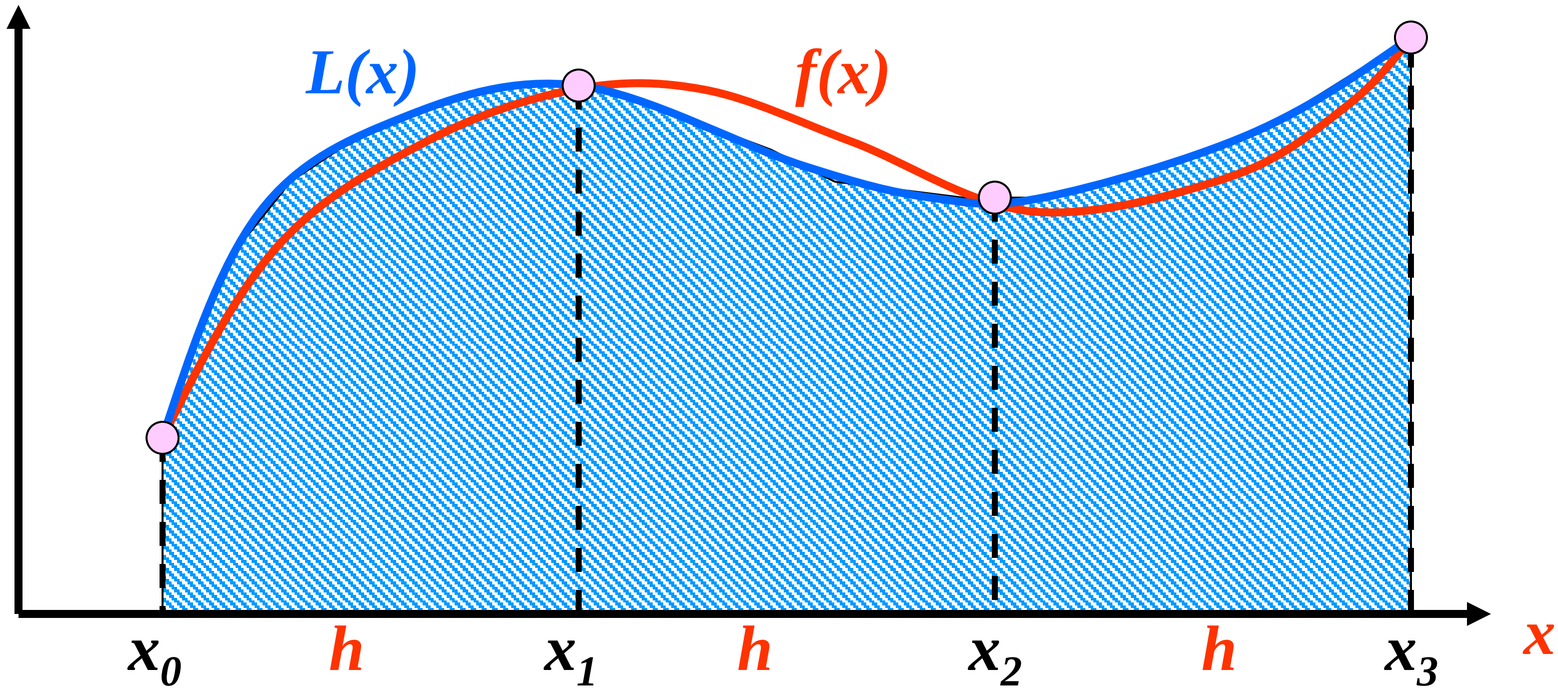
Interpolasi Linier



Interpolasi Kudrat



Interpolasi Qubic



Interpolasi dg Polinomial

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Table : Six equidistantly spaced points in [-1, 1]

x	$y = \frac{1}{1+25x^2}$
-1.0	0.038461
-0.6	0.1
-0.2	0.5
0.2	0.5
0.6	0.1
1.0	0.038461

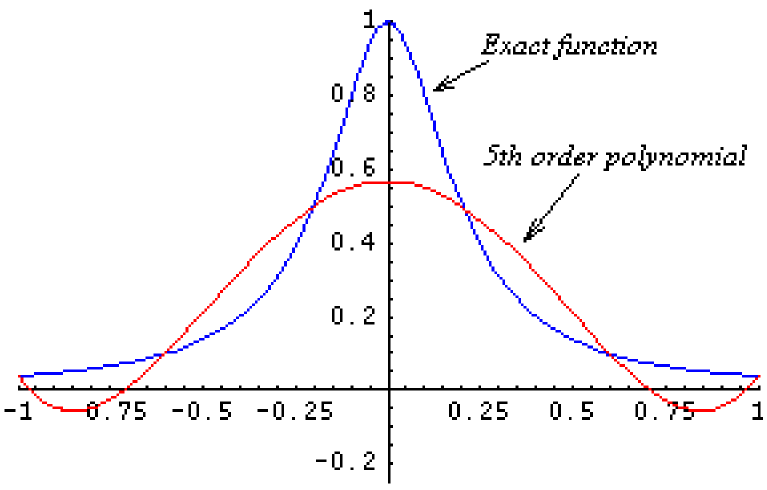


Figure : 5^{th} order polynomial vs. exact function

Interpolasi dg Polinomial

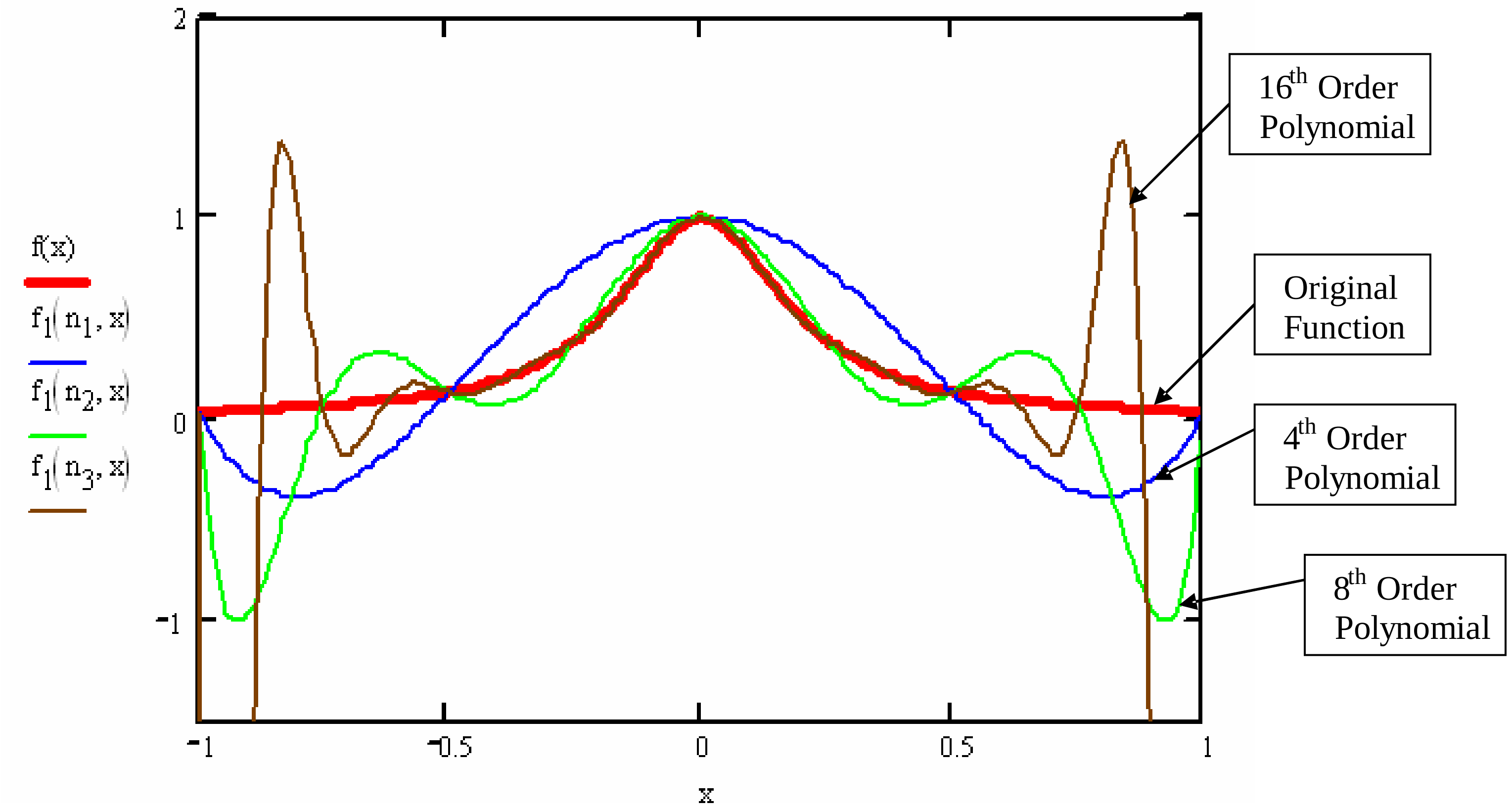
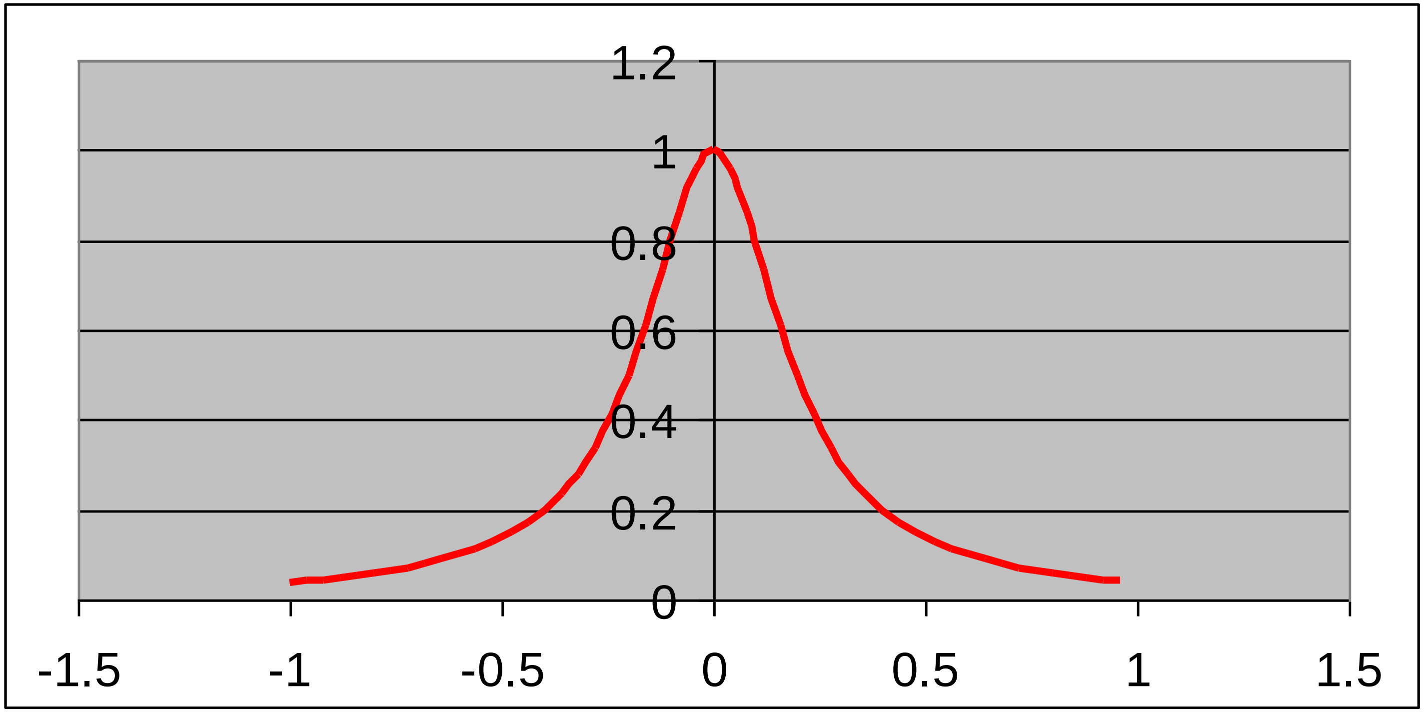


Figure : Higher order polynomial interpolation is a bad idea

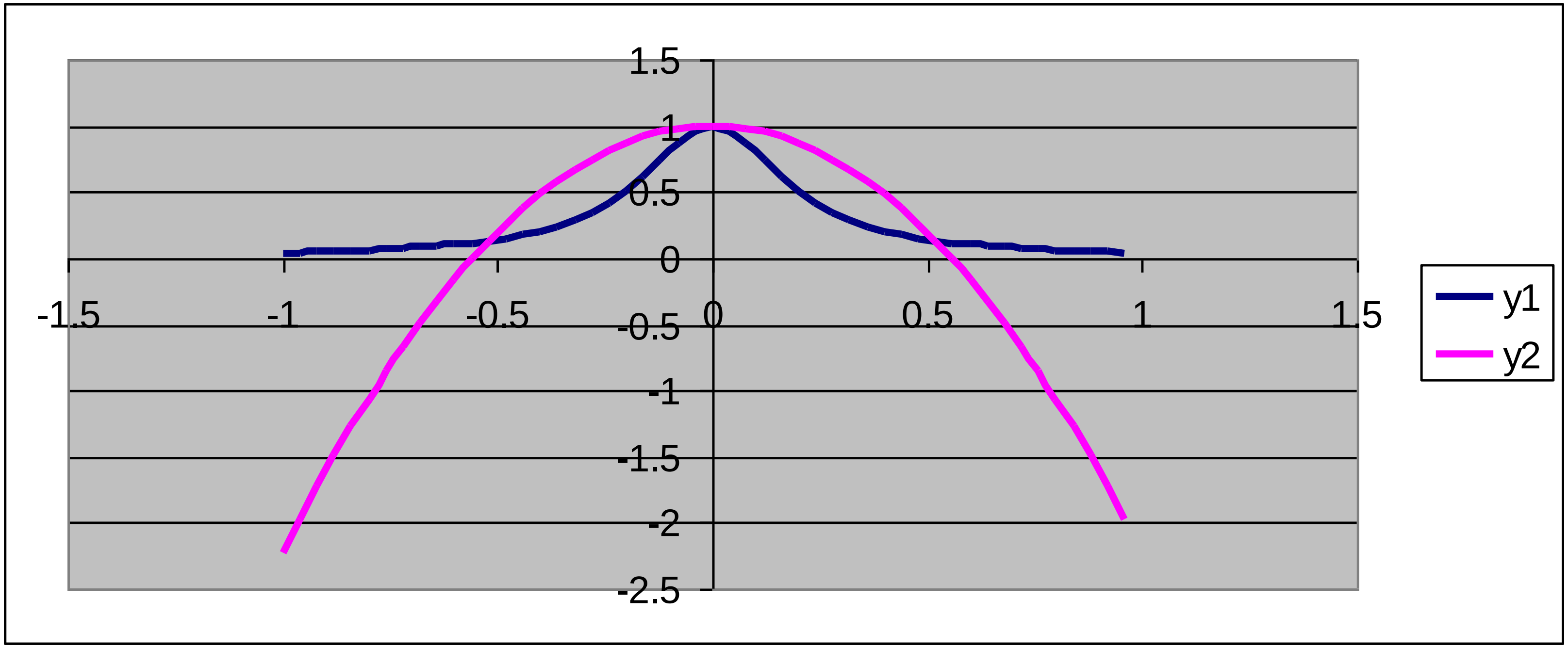
Uji Coba

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$



Interpolasi Kuadratik

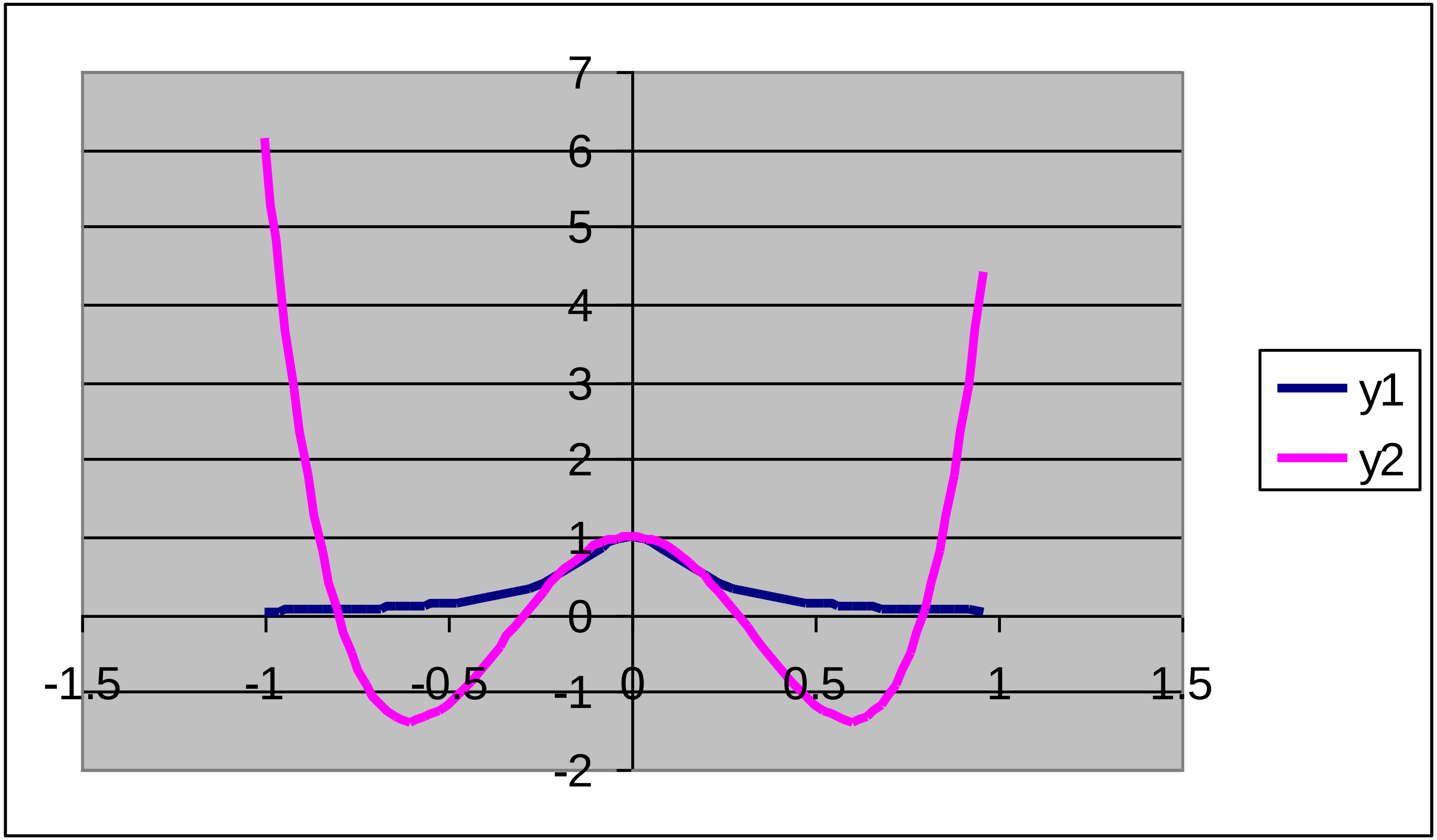
- Titik yang digunakan
  - -0.52 0.128866
  - 0.52 0.128866
  - 0 1
- $F(x) = -3.22165x^2 + 1$



Interpolasi Polinom derajat 4

- Titik yang digunakan
  - 0 1
  - 0.2 0.5
  - -0.2 0.5
  - 0.8 0.058824
  - -0.8 0.058824
- $F(x) = 18.3824x^4 - 13.2353x^2 + 1$

Interpolasi Polinom derajat 4

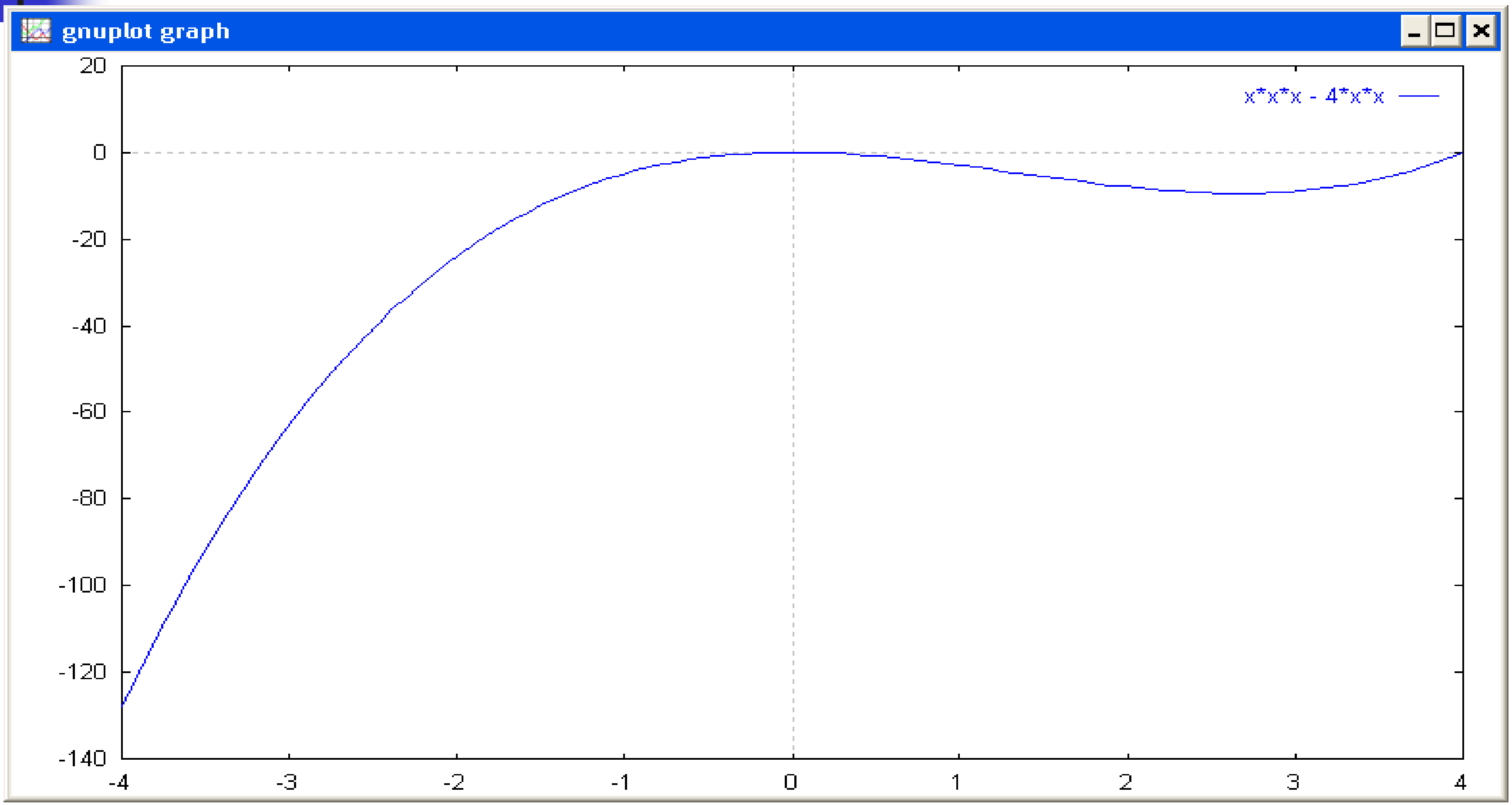


Contoh 2 :

Titik2 yang digunakan untuk menghitung interpolasi n = 3

(-3,-63) (3,-9)

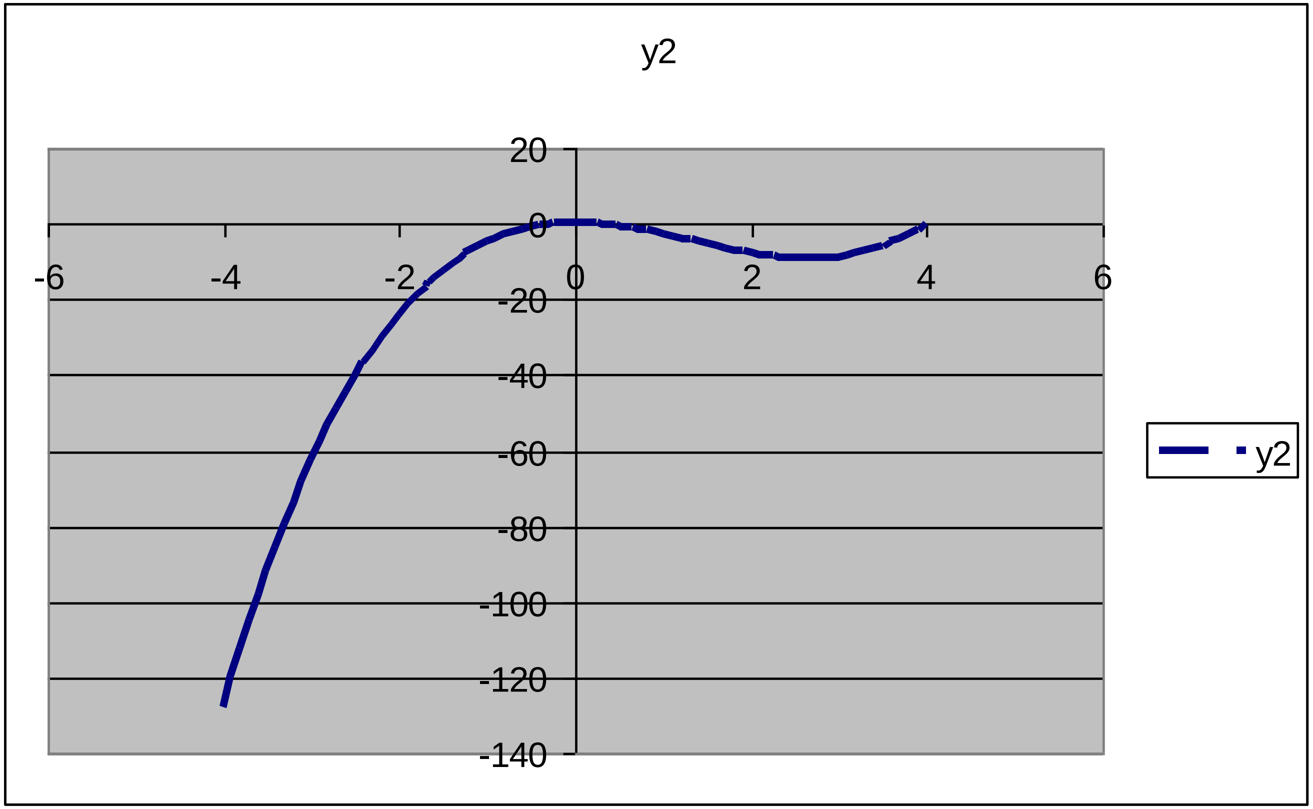
(0,0) (-2,-24)



Contoh 2 :

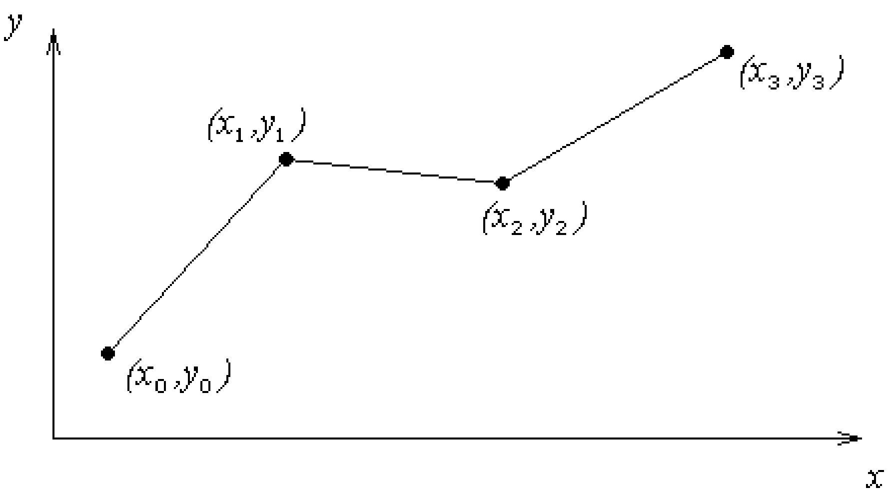
- Persamaan
  - $-27a + 9b - 3c + d = -63$
  - $7a + 9b + 3c + d = -9$
  - $-8a + 4b - 2c + d = -24$
  - $d = 0$
- Penyelesaian
  - $X^3 - 4x^2 + 1.59872e\text{-}15X$

Hasil

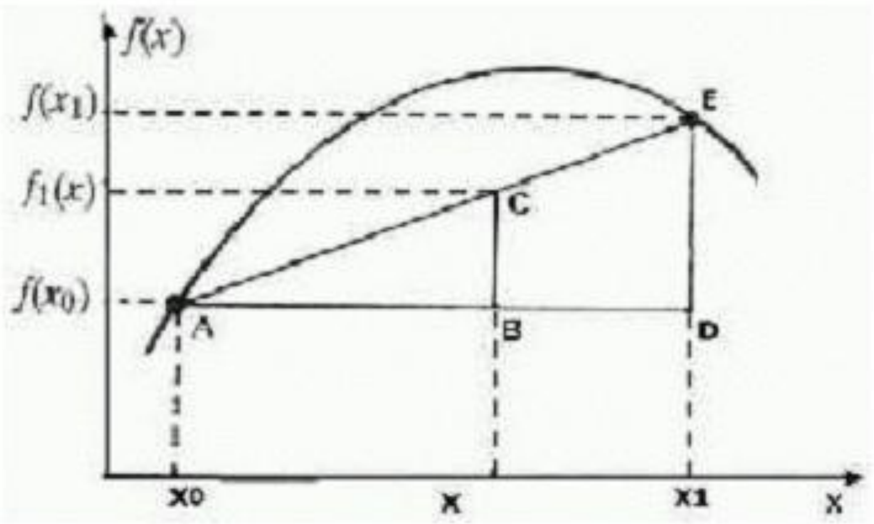


Interpolasi Linier

- ide dasar : pada saat data dalam bentuk tabel tidak begitu bervariasi, sehingga memungkinkar untuk dilakukan pendekatan dengan menggunakan sebuah garis lurus di antara dua titik yang berdekatan.



Interpolasi Linier



$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

atau $\boxed{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}$

sehingga $\boxed{f_1(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}.(x - x_0)}$

Contoh :

- Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaraan untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. Data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kendaraan.

Kecepatan (mil/jam)	10	20	30	40	50	60	70
Jarak henti (feet)	12	21	46	65	90	111	148

- Perkirakan jarak henti yang dibutuhkan bagi sebuah kenderaan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam.

Contoh :

- maka untuk mencari nilai x=45 maka,

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{90 - 65}{50 - 40}(45 - 40)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{25}{10}(5) = 65 + 12.5 = 77.5 \text{ feet}$$

Example

The upward velocity of a rocket is given as a function of time in Table 1. Find the velocity at t=16 seconds using linear splines.

t	v(t)
s	m/s
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67

Table : Velocity as a function of time

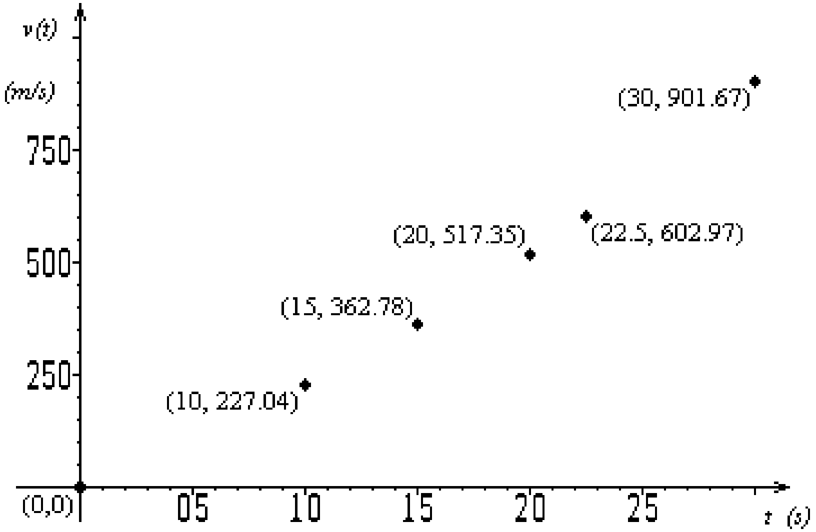


Figure : Velocity vs. time data for the rocket example

Linear Interpolation

$t_0 = 15, \qquad v(t_0) = 362.78$

$t_1 = 20, \qquad v(t_1) = 517.35$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

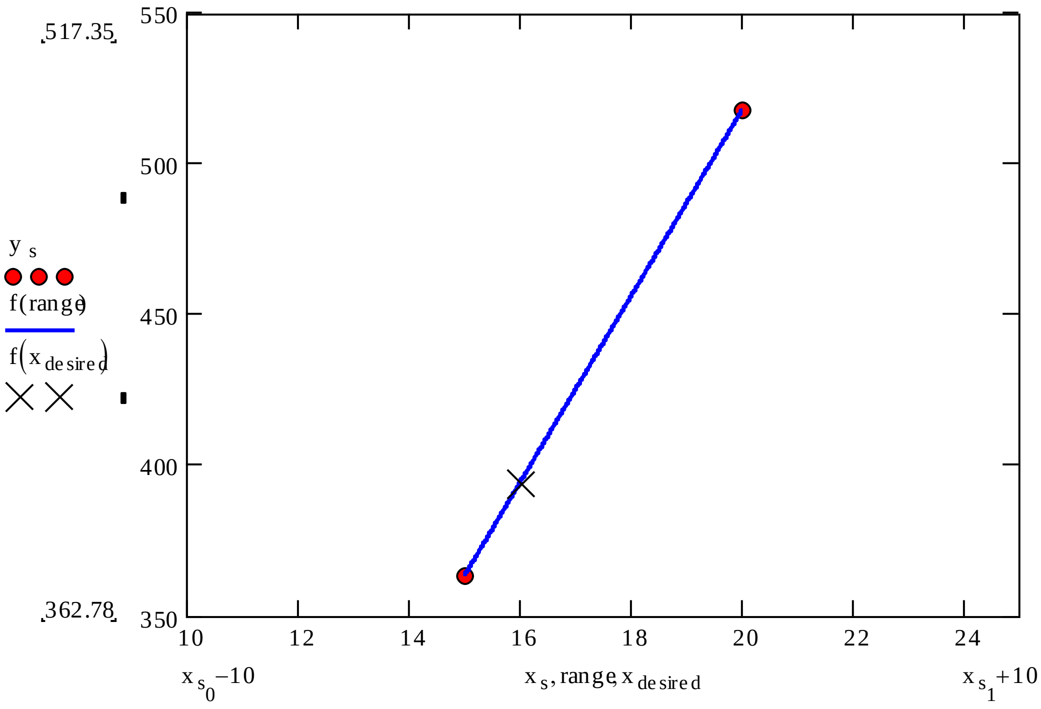
$$= 362.78 + \frac{517.35 - 362.78}{20 - 15}(t - 15)$$

$$v(t) = 362.78 + 30.913(t - 15)$$

At $t = 16$,

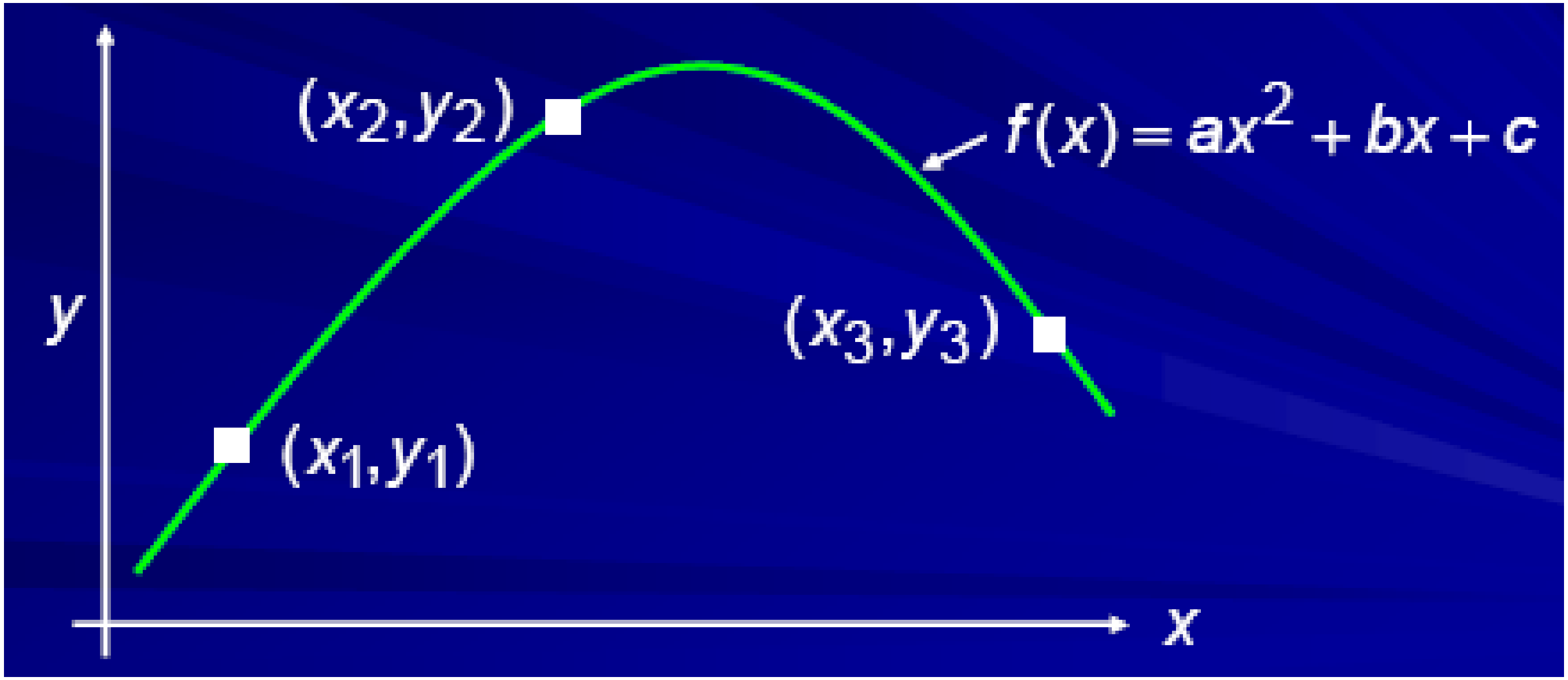
$$v(16) = 362.78 + 30.913(16 - 15)$$

$$= 393.7 \text{ m/s}$$



Interpolasi Kuadrat

$F(x) = ax^2 + bx + c$



Interpolasi Kuadrat

- Titik-titik data (x_1,y_1) (x_2,y_2) (x_3,y_3)

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$$
$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$$
$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3$$

- Hitung a, b dan c dari sistem persamaan tersebut dengan Metode Eliminasi Gauss

Interpolasi Kuadrat (Versi lain)

- Untuk memperoleh titik baru Q (x,y)

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

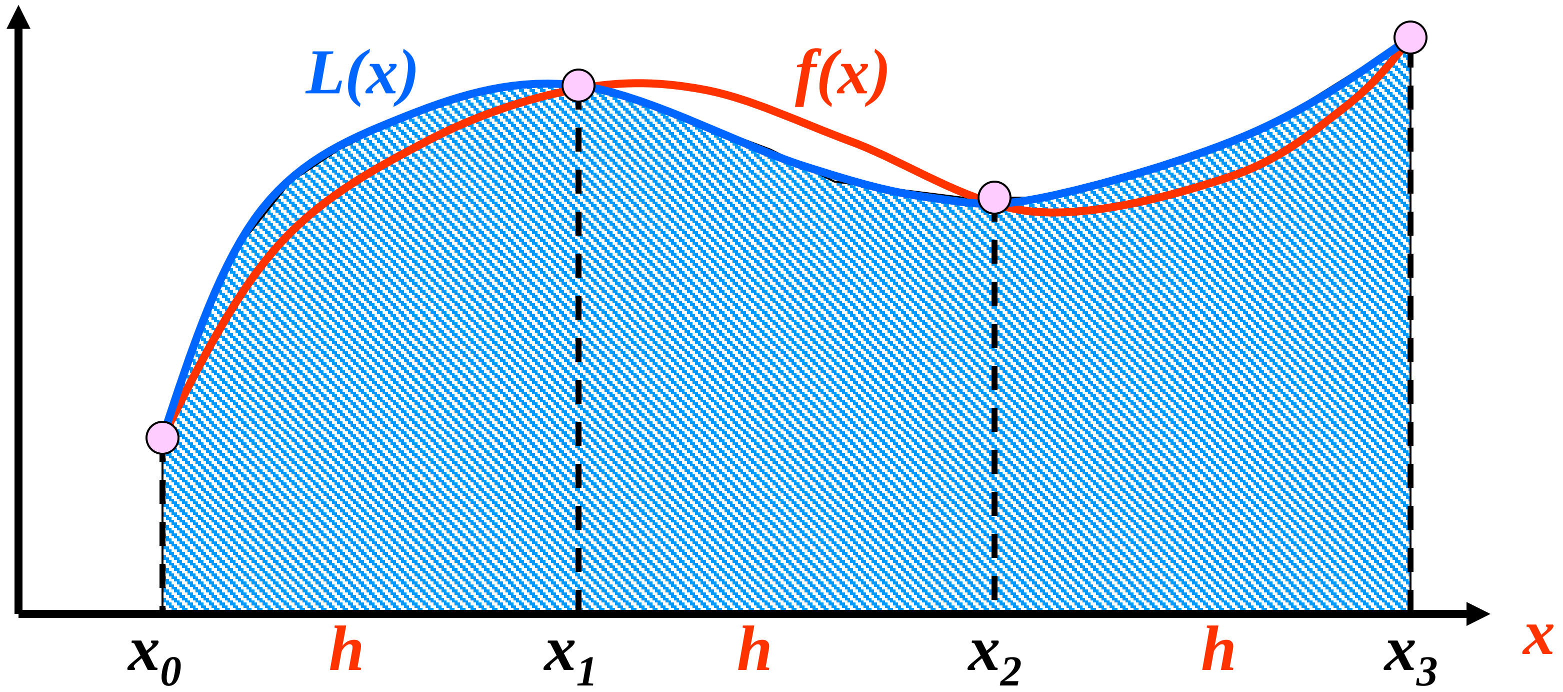
Contoh :

- Diberikan titik ln(8) = 2.0794, ln(9) = 2.1972, ln(9.5) = 2.2513. Tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadrat

- Sistem Pers Linier yang terbentuk.
  - $64\,a + 8\,b + c = 2.0794$
  - $81\,a + 9\,b + c = 2.1972$
  - $90.25\,a + 9.5\,b + c = 2.2513$
- Penyelesaian a= -0.0064 b = 0.2266

  c = 0.6762
- Sehingga p2(9.2) = 2.2192

Interpolasi Qubic



Interpolasi Qubic

- Terdapat 4 titik data (x_0,y_0) (x_1,y_1) (x_2,y_2) dan (x_3,y_3)
- $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
- Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara
  - Masukan (x_i,y_i) ke dalam persamaan
    - $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$
    - $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$
    - $a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$
    - $a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$
  - Hitung a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3

Metode Lain

- Secara umum, penentuan polinomial dengan cara tsb kurang disukai, karena mempunyai kemungkinan yang jelek terutama untuk derajat polinomial yang semakin tinggi.
- Terdapat beberapa metode polinom interpolasi :
  - Polinom Lagrange
  - Polinom Newton
  - Polinom Newton Gregory

Polinom Lagrange

- Polinom berderajat satu $$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$
- Dapat diatur kembali sedemikian rupa sehingga menjadi
$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$
- Atau dapat dinyatakan dalam bentuk (*)
$$p_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x)$$
- Dimana $a_0 = y_0$ $a_1 = y_1$
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$
- Persamaan * dinamakan Polinom Lagrange derajat 1.

Polinom Lagrange

- Bentuk umum Polinom Lagrange derajat ≤ n untuk (n+1) titik berbeda adalah :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \ldots + a_n L_n(x)$$

- Yang dalam hal ini $a_i = y_i$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Contoh :

- Hampiri fungsi f(x) = cos(x) dengan polinom interpolasi derajat tiga pada range [0.0, 1.2]. Gunakan empat titik
- $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 1.2$
- Perkirakan nilai p3(0.5) dan bandingkan dengan nilai sebenarnya.

X_i	0.0	0.4	0.8	1.2
y_i	1	0.921061	0.696707	0.362358

Contoh :

- Polinom Lagrange derajat 3 yang menginterpolasi keempat titik tsb.

$$p_3(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(x)$$

$$p_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$p_3(X) = 1\frac{(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.0-0.4)(0.0-0.8)(0.0-1.2)} + 0.921061\frac{(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.4-0.0)(0.4-0.8)(0.4-1.2)} +$$

$$0.696707\frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2)}{(0.8-0.0)(0.8-0.4)(0.8-1.2)} + 0.362358\frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)}{(1.2-0.0)(1.2-0.4)(1.2-0.8)}$$

$$p_3(0.5) = 0.877221 \qquad y = \cos(0.5) = 0.877583$$

Polinom Newton

- Polinom Lagrange kurang disukai dalam praktek karena :
  - Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi adalah besar. Interpolasi untuk nilai x yang lain memerlukan jumlah komputasi yang sama karena tidak ada bagian komputasi sebelumnya yang dapat digunakan.
  - Bila jumlah titik data meningkat atau menurun, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan. Karena tidak ada hubungannya antara $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$ pada polinom Lagrange
- Polinom yang dibentuk sebelumnya dapat digunakan untuk membentuk polinom derajat yang lebih tinggi.

Polinom Newton

- Persamaan Polinom Linier

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

- Bentuk pers ini dapat ditulis :

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

- Yang dalam hal ini

$$a_0 = y_0 = f(x_0) \quad (1)$$

- Dan

$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \quad (2)$$

- Pers ini mrpk bentuk selish terbagi (divided-difference)

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

Polinom Newton

- Polinom kuadratik $$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Atau $$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Dari pers ini menunjukkan bahwa $p_2(x)$ dapat dibentuk dari pers sebelumnya $p_1(x)$. Nilai a_2 dapat ditemukan dengan mengganti $x=x_2$ untuk mendapatkan (3)

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- Nilai a_0 dan a_1 pada pers 1 dan 2 dimasukkan pada pers 3

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

Polinom Newton

- Dengan melakukan utak-atik aljabar, pers ini lebih disukai

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

Polinom Newton

- Jadi tahapan pembentukan polinom Newton :

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Polinom Newton

- Nilai konstanta a_0, a_1, a_2,…, a_n, merupakan nilai selisih terbagi , dg nilai

$$a_0 = f(x_0)$$
$$a_1 = f[x_1, x_0]$$
$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$
$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

- Yang dalam hal ini

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0)}{x_n - x_0}$$

Polinom Newton

- Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hub rekursif sebagai :
  - Rekurens

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

  - basis $p_0(x) = f(x_0)$
- Atau dalam bentuk polinom yang lengkap sbb :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Contoh Soal :

- Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri f(x)=cos(x) dalam range[0.0, 4] dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah f(x) dengan x=2.5 dengan Polinom Newton derajat 3.

x_i	y_i	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0.0	1	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
1.0	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
2.0	-0.4161	-0.5739	0.4551		
3.0	-0.99	0.3363			
4.0	-0.6536				

Contoh Soal :

- Contoh cara menghitung nilai selisih terbagi pada tabel :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.5403 - 1}{1 - 0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{-0.4161 - 0.5403}{2 - 1} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = \frac{-0.9564 + 0.4597}{2 - 0} = -0.2484$$

Contoh Soal :

- Maka polinom Newton derajat 1,2 dan 3 dengan x_0 = 0 sebagai titik pertama :

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$

$$\cos(x) \approx p_4(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)$$

- Nilai sejati f(2.5) adalah
  - F(2.5) = cos(2.5)=-0.8011