Distribusi Peluang Diskret

- Misalkan X adalah suatu variabel acak diskret yang dapat bernilai x_1, x_2, …, x_n, maka :
  - ☑ Peluang untuk setiap nilai x_i terletak antara nol dan satu.

$$0 \leq p(x) \leq 1 \quad untuk \;\; i = 1,2,..., n$$

  - ☑ Jumlah peluang untuk semua nilai x_i sama dengan satu.

$$\sum_{i=1}^{n} p(x) = 1$$

- Contoh :
  - ☑ Pada kasus pelemparan 2 koin di atas P(0 ≤ x ≤ 1) = 0.25 + 0.50 = 0.75

Expected Value dan Varian

- Distribusi peluang bagi suatu variabel acak X pada dasarnya merupakan distribusi dari suatu populasi.
- Kita dapat menentukan rata-rata dan varian dari variabel acak X untuk menjelaskan karakteristik dari distribusi tersebut.
- Untuk menjelaskan pemusatan (rata-rata) dari distribusi tersebut digunakan **nilai harapan (expected value)**, sedangkan untuk menjelaskan penyebarannya digunakan ukuran **varian**.

Expected Value dari X – E(X)

- E(X) merupakan rata-rata distribusi peluang
- E(X) merupakan rata-rata tertimbang dari seluruh hasil yang mungkin
- Jika X adalah variabel acak diskret yang memiliki fungsi massa peluang $p(x_i)$, nilai harapan X didefinisikan sebagai :

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

Aturan tentang Expected Value

- Misalkan X dan Y masing-masing adalah variabel acak, dan c adalah suatu konstanta, maka :
  - ☑ $E(c) = c$
  - ☑ $E(cX) = c.E(X)$
  - ☑ $E(\mu_X)=\mu_X$, seperti : $E(E(X))=E(X)$
  - ☑ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
  - ☑ $E(X-Y) = E(X) – E(Y)$
  - ☑ $E(X- \mu_X) = 0$ atau $E(X-E(X)) = 0$
  - ☑ $E((aX)^2) = a^2E(X^2)$
  - ☑ Jika X dan Y keduanya adalah variabel acak yang independen, maka $E(XY) = E(X).E(Y)$

Varian dari X – Var(X)

- Varian X merupakan ukuran sebaran suatu distribusi
- Var(X) merupakan nilai harapan dari kuadrat beda terhadap mean, sehingga :

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E\left[\left(X - \mu_X \right)^2 \right]$$

Varian dari X – Var(X)

- Akar kuadrat Var(X) adalah standar deviasi X
- Misal X adalah suatu variabel acak yang bernilai x_1, x_2, …, x_n dengan peluang masing-masing adalah $p(x_1)$, $p(x_2)$, …, $p(x_n)$, sebagai alternatifnya, Var(X) dapat ditulis dalam bentuk jumlah tertimbang dari kuadrat deviasi, sebagai berikut :

$$E\left[\left(X-\mu_X\right)^2\right]=\sum\left(x_i-\mu_X\right)^2 p\left(x_i\right)$$

Aturan tentang Varian

- Misalkan X dan Y masing-masing adalah variabel acak, dan c adalah suatu konstanta, maka :
  - ☑ $Var(c) = 0$
  - ☑ $Var(cX) = c^2.Var(X)$
  - ☑ $Var(X+c) = Var(X)$
  - ☑ $Var(X) = E(X^2) - \mu_x{}^2$
  - ☑ $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$
  - ☑ $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$
  - ☑ $Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x\mu_y$
  - ☑ Jika X dan Y keduanya adalah variabel acak yang independen, maka $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

    dan $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$ dimana $E(XY)=E(X)E(Y)$

Contoh : Expected Value & Varian

- Misalkan Y adalah variabel acak diskret dengan distribusi peluang sebagai berikut :

Y	1	2	3	4
P(y)	0.4	0.3	0.2	0.1

- ☑ Tentukan nilai harapan dan varian bagi Y
- ☑ Tentukan nilai harapan dan varian bagi X = 3Y-2

Solusi : Expected Value & Varian

- Kita buat tabel perhitungan seperti di bawah ini :

y	f(y) = p(y)	y.p(y)	y-m	(y-m)2	(y-m)2.p(y)
1	0.4	0.4	-1	1	0.4
2	0.3	0.6	0	0	0
3	0.2	0.6	1	1	0.2
4	0.1	0.4	2	4	0.4
Total		2 $= \mu$			1 $= \sigma^2$

- Sehingga kita peroleh :
  - ☑ E(Y) = 2 dan Var(Y) = 1
  - ☑ E(X) = E(3Y-2) = 3E(Y) – 2 = 3(2) – 2 = 4

    Var(X) = Var(3Y-2) = 3^2.Var(Y) = 9

Contoh : Hukum Nilai Harapan - Varian

- Contoh
  - Penjualan bulanan sebuah toko komputer memiliki mean \$ 25,000 dan standar deviasi \$ 4,000.
  - Profit 30 % dari penjualan dikurangi biaya tetap \$ 6,000.
  - Tentukan mean dan standar deviasi profit bulanan.

Solusi - Hukum Nilai Harapan - Varian

- Solusi
  - Profit = .30(Sales) – 6,000
  - E(Profit) = E[.30(Sales) – 6,000]

    = E[.30(Sales)] – 6,000

    = .30E(Sales) – 6,000

    = .(30)(25,000) – 6,000 = 1,500

E(X + c) = E(X) + c

E(cX) = cE(X)

- V(Profit) = V(.30(Sales) – 6,000]

  = V[(.30)(Sales)]

  = (.30)^{2}V(Sales) = 1,440,000

V(X + c) = V(X)

V(cX) = c^{2}V(X)

- σ = [1,440,000]$^{1/2}$ = 1,200

Distribusi Bivariate

- Bivariate (or joint) distribution digunakan saat hubungan dua variabel dipelajari.
- Peluang X mengasumsikan nilai x, dan Y mengasumsikan nilai y, diberikan oleh :

$$\boxed{p(x,y) = P(X=x \text{ dan } Y = y)}$$

Distribusi Bivariate

- Joint probability function harus memenuhi kondisi berikut :

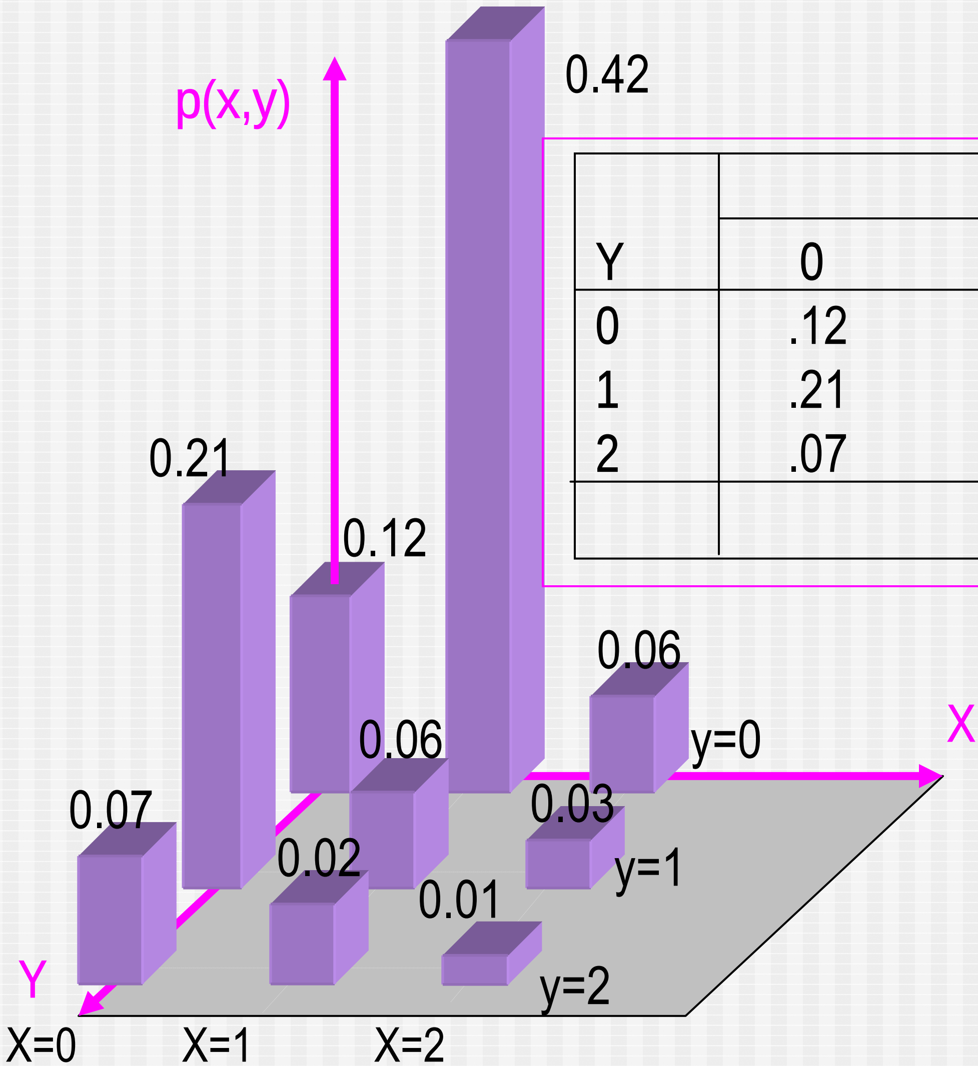
$$1.\ \ 0 \le p(x, y) \le 1$$

$$2.\ \ \sum_{all\ x} \sum_{\text{all } y} p(x, y) = 1$$

Contoh - Distribusi Bivariate

- Contoh
  - Xa dan Yi adalah dua agen real estate. Anggap X dan Y masing-masing melambangkan jumlah rumah yang akan dijual Xa dan Yi minggu depan.
  - Bivariate probability distribution ditampilkan berikut :

Contoh - Distribusi Bivariate



Y	X 0	1	2
0	.12	.42	.06
1	.21	.06	.03
2	.07	.02	.01

Marginal Probabilities

- Contoh – lanjutan
  - ☑ Jumlahkan baris mendatar dan kolom ke bawah

Y	X: 0	X: 1	X: 2	p(y)
0	.12	.42	.06	.60
1	.21	.06	.03	.30
2	.07	.02	.01	.10
p(x)	.40	.50	.10	1.00

p(0,0)
p(0,1)
p(0,2)

P(Y=1), the marginal probability.

The marginal probability P(X=0)

Mendeskripsikan Distribusi Bivariate

- Joint distribution dapat dideskripsikan dengan mean, varian, dan standar deviasi dari masing-masing variabel.
- Hal ini dilakukan dengan menggunakan marginal distribution.

x	p(x)	y	p(y)
0	.4	0	.6
1	.5	1	.3
2	.1	2	.1

E(X) = .7 E(Y) = .5

V(X) = .41 V(Y) = .45

Mendeskripsikan Distribusi Bivariate

- Untuk menggambarkan hubungan antara dua variabel, kita hitung covarian dan koefisien korelasi
  - ☑ Covariance:

$$COV(X,Y) = \Sigma(X - \mu_x)(Y - \mu_y)p(x,y)$$

  - ☑ Coefficient of Correlation

$$\rho = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Covarian – Cov(X,Y)

- Covarian antara X dan Y adalah sebuah ukuran asosiasi antara dua variabel acak, X & Y
- Jika positif, maka keduanya bergerak naik atau turun bersama
- Jika negatif, maka jika X tinggi, Y rendah, demikian sebaliknya

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E\left[\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right]$$

Korelasi antara X dan Y

- Covarian tergantung pada unit X & Y [Cov(aX,bY) = ab Cov(X,Y)]
- Correlation, Corr(X,Y), membagi covarian dengan standar deviasi X & Y sehingga nilainya terletak antara 1 & –1

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\left[Var(X)Var(Y)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Korelasi & Covarian

- Jika $\sigma_{X,Y}$ =0 (atau ekuivalen $\rho_{X,Y}$ =0) maka X dan Y tidak berhubungan linear
- Jika $\rho_{X,Y}$ = 1 maka X dan Y dikatakan berkorelasi positif sempurna
- Jika $\rho_{X,Y}$ = – 1 maka X dan Y dikatakan berkorelasi negatif sempurna
- Corr(aX,bY) = Corr(X,Y) jika ab > 0
- Corr(aX,bY) = –Corr(X,Y) jika ab < 0

Contoh - Distribusi Bivariate

- Hitung covarian dan koefisien korelasi antara jumlah rumah yang dijual oleh dua agen tersebut
  - ☑ Solusi
    - $COV(X,Y) = \Sigma(x-\mu_x)(y-\mu_y)p(x,y) = (0-.7)(0-.5)p(0,0)+\ldots(2-.7)(2-.5)p(2,2) = -.15$
    - $\rho = COV(X,Y)/\sigma_x\sigma_y = -.15/(.64)(.67) = -.35$

Peluang Bersyarat (Optional)

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x \; dan \; Y = y)}{P(Y = y)}$$

Contoh - lanjutan

$$P(X = 0 \mid Y = 1) = \frac{P(X = 0 \; dan \; Y = 1)}{P(Y = 1)} = \frac{.21}{.30} = .7$$

$P(X = 1 \mid$

$P(X = 2$

Y	X: 0	X: 1	X: 2	p(y)
0	.12	.42	.06	.60
1	.21	.06	.03	.30
2	.07	.02	.01	.10
p(x)	.40	.50	.10	1.00

Jumlah sama dengan1.0

Kondisi Independensi (optional)

- Dua variabel dikatakan independen jika

$$P(X=x|Y=y)=P(X=x) \text{ or } P(Y=y|X=x)=P(Y=y).$$

- Hal ini mengarah pada hubungan variabel independen berikut

$$P(X=x \text{ dan } Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

- Contoh - lanjutan
  - Karena $P(X=0|Y=1)=.7$ tetapi $P(X=0)=.4$, Variabel X dan Y adalah **tidak independen.**

Jumlah Dua Variabel

- Distribusi peluang X + Y ditentukan dengan
  - Menentukan seluruh nilai yang mungkin sehingga ….Determining all the possible values that X+Y can assume
  - Untuk setiap nilai C dari X+Y yang mungkin, tambahkan peluang dari seluruh kombinasi X dan Y untuk X+Y = C
- Contoh - lanjutan
  - Tentukan distribusi peluang dari jumlah total rumah yang dijual per minggu oleh Xa dan Yi.
  - Solusi
    - X+Y adalah jumlah total rumah terjual. X+Y dapat memiliki nilai 0, 1, 2, 3, 4.

Distribusi Peluang X+Y

P(X+Y=0) = P(X=0 dan Y=0) = .12

P(X+Y=1) = P(X=0 dan Y=1)+ P(X=1 dan Y=0) =.21 + .42 = .63

P(X+Y=2) = P(X=0 dan Y=2) + P(X=1 dan Y=1) + P(X=2 dan Y=0)
= .07 + .06 + .06 = .19

	X			
Y	0	1	2	p(y)
0	.12	.42	.06	.60
1	.21	.06	.03	.30
2	.07	.02	.01	.10
p(x)	.40	.50	.10	1.00

Peluang P(X+Y)=3 dan P(X+Y) = 4 dihitung dengan cara yang sama. Distribusinya mengikuti

Nilai Harapan dan Varian X+Y

- Distribusi X+Y

x + y	0	1	2	3	4
p(x+y)	.12	.63	.19	.05	.01

- Nilai harapan dan varian X+Y dapat dihitung dari distribusi X+Y.
  - ☑ E(X+Y) = 0(.12)+ 1(63)+2(.19)+3(.05)+4(.01) = 1.2
  - ☑ V(X+Y) = $(0-1.2)^2$(.12)+$(1-1.2)^{2(}$.63)+… = .56

Nilai Harapan dan Varian X+Y

- Hubungan berikut dapat membantu menghitung $E(X+Y)$ dan $V(X+Y)$
  - $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
  - $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2COV(X,Y)$
  - Saat X dan Y saling independen $COV(X,Y) = 0$, and $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Distribusi Peluang Kontinu

- Kita katakan X adalah variabel acak kontinu jika terdapat fungsi nonnegatif f, didefinisikan untuk seluruh nilai riil x Є (- ∞ , ∞) yang memiliki sifat bahwa untuk setiap kumpulan B angka riil :

$$P\{X \in B\}\int = \int_B f(x)dx$$

  - ☑ Fungsi ini disebut dengan probability density function dari variabel acak X.

Distribusi Peluang Kontinu

- Pada pembahasan variabel acak diskret, umumnya kita selalu dapat mendaftarkan semua nilainya dan menentukan peluang bagi setiap nilai tersebut. Tetapi ini tidak akan bisa dilakukan saat berhadapan dengan variabel acak kontinu, karena :
  - ☑ suatu variabel acak kontinu dapat mengambil sembarang nilai dalam suatu interval tertentu dalam sistem bilangan nyata (riil).
  - ☑ jumlah nilai yang mungkin diambil oleh suatu variabel acak kontinu dapat tak terhingga banyaknya dan tidak mungkin kita daftarkan secara rinci satu persatu.
  - ☑ kita juga tak dapat menentukan peluang bagi setiap nilai variabel acak yang tetap memenuhi persyaratan sebagai suatu distribusi peluang, yaitu bahwa jumlah peluang tersebut harus sama dengan 1.

Distribusi Peluang Kontinu

- Oleh karena itu, perlu digunakan pendekatan lain dalam menentukan dan menginterpretasikan distribusi peluang bagi variabel acak kontinu.
- Peluang dapat diinterpretasikan melalui pendekatan konsep frekuensi relatif, sehingga nilai peluang suatu kejadian merupakan frekuensi relatif dari kejadian tersebut dalam suatu percobaan dengan jumlah ulangan yang besar.

Contoh - Distribusi Peluang Kontinu

- Contoh :
  - ☑ Dari 100 orang sampel yang diambil secara acak, setiap orang diminta untuk mengerjakan suatui tugas tertentu. Hasil pengamatan terhadap waktu yang mereka gunakan untuk menyelesaikan tugas tersebut disajikan dalam tabel berikut :

Waktu (detik)	Frekuensi	Frekuensi Relatif
14 sampai 18	2	0.02
15 sampai 18	11	0.11
16 sampai 18	20	0.20
17 sampai 18	42	0.42
18 sampai 18	17	0.17
19 sampai 18	5	0.05
20 sampai 18	3	0.03
	100	1.00

Contoh - Distribusi Peluang Kontinu

- Misalkan percobaan tersebut diulang kembali, kali ini jumlah sampel yang digunakan adalah 5000 orang. Lalu histogram frekuensi relatifnya dibuat dengan jumlah interval kelas yang besar tetapi lebar kelasnya dibuat kecil. Maka histogram tersebut akan terdiri atas kotak persegi panjang yang ramping dalam jumlah yang banyak. Dengan semakin banyaknya sampel yang diambil dan lebar interval kelas yang kecil, maka histogram frekuensi relatif yang dihasilkan akan semakin mendekati bentuk kurva yang kontinu,

Distribusi Peluang Kontinu

- Sesuai dengan pendekatan konsep frekuensi relatif, maka peluang bagi variabel acak kontinu ditentukan atas luas daerah di bawah kurva yang disebut sebagai fungsi kepekatan peluang (probability density function)
- Semua fungsi kepekatan peluang f(x) harus memenuhi dua persyaratan berikut :
  - ☑ Kurva tidak pernah terletak di bawah sumbu mendatar, artinya $f(x) \geq 0$, untuk semua nilai x.
  - ☑ Total luas di bawah kurva harus sama dengan satu, atau

$$\int f(x)dx = 1$$

Distribusi Peluang Kontinu

- Perlu diingat bahwa f(x) bukanlah suatu nilai peluang, artinya $f(x) \neq P(X=x)$.
- Karena luas di bawah kurva untuk satu titik tertentu adalah nol, maka setiap nilai tunggal suatu variabel acak kontinu mempunyai peluang sama dengan nol. Artinya jika X adalah suatu variabel acak kontinu, maka $P(X=x) = 0$, untuk semua nilai x, karena $P(X=a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$
- Oleh karena itu bagi setiap variabel acak kontinu berlaku bahwa : $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$.

  Nilai peluang tersebut dinyatakan sebagai luas di bawah f(x) dalam interval $a < x < b$.

Nilai Harapan dan Varian

- Jika X adalah variabel acak kontinu memiliki fungsi padat peluang f(x), maka :

  $f(x)\,dx \approx P(x \leq X \leq x+dx)$ untuk dx bernilai kecil

- Mudah dilihat bahwa dengan menganalogikan pada definisi pada variabel acak diskret untuk mendefinisikan nilai harapan X yaitu :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

Nilai Harapan dan Varian

- Varian dari variabel acak kontinu X didefinisikan secara tepat seperti pada variabel acak diskret. Sebut, X adalah variabel acak kontinu dengan nilai harapan μ, maka varian X didefinisikan dengan :

$$Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

- Rumus alternatifnya adalah :

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2$$

Yang ditetapkan dengan cara yang sama seperti pada variabel acak diskret

Contoh - Distribusi Peluang Kontinu

- Anggap bahwa X adalah variabel acak kontinu yang memiliki fungsi padat peluang berikut :

$$f(x) = \begin{cases} C\left(4x - 2x^2\right) & \text{jika } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{jika yang lain} \end{cases}$$

  - ☑ Berapakah nilai C ?
  - ☑ Tentukan P{X>1}
- Solusi :
  - ☑ Karena f adalah p.d.f, kita penuhi $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, yang berakibat bahwa :

$$C\int_0^2 \left(4x - 2x^2\right)dx = 1 \text{ atau } C\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 1 \text{ atau } C = \frac{3}{8}$$

  - ☑ Nilai P{X>1} = $\int_1^{\infty} f(x)dx = \frac{3}{8}\int_1^2 \left(4x - 2x^2\right)dx = \frac{1}{2}$