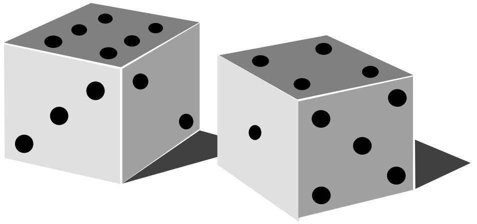
Probabilitas

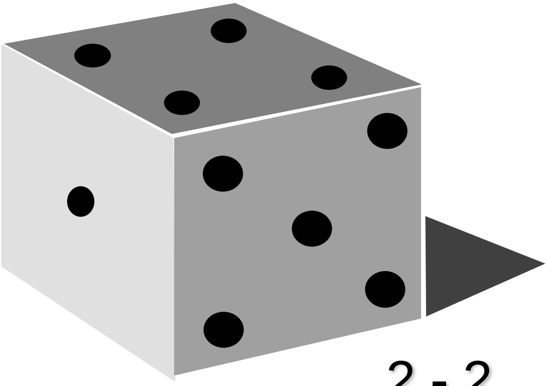
Statistik



Sample Space

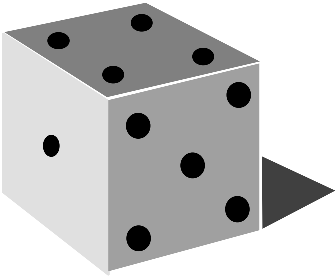
Definisi 1: Sample Space
Ruang sampel adalah himpunan semua hasil (outcomes) yang mungkin dari suatu percobaan statistik.
Disimbolkan dengan **S**

Masing-masing hasil pada ruang sample disebut unsur (element) atau titik sampel (sample point).



Sample Space

- Contoh melantumkan (tossing) mata uang, maka kemungkinan hasil yang diperoleh adalah S={Head,Tail}
- Contoh percobaan melantumkan sebuah dadu (die), maka ruang sample S_1={1, 2, 3, 4, 5 ,6}
- Contoh bila yang diinginkan adalah nomer genap atau ganjil, maka ruang sample S_2={even, odd}



Sample Space

Visualisai ruang sampel

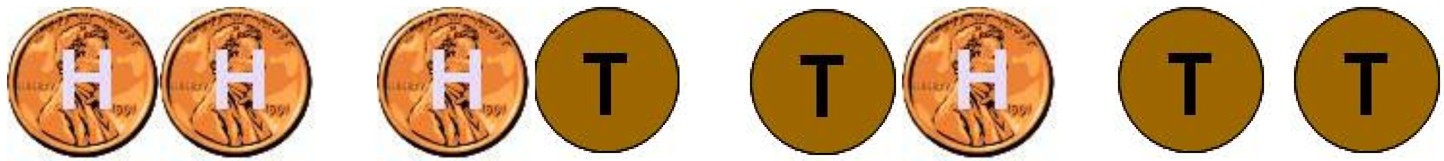
1. Listing
2. Venn Diagram
3. Contingency Table
4. Decision Tree Diagram

Sample Space

Visualisai; Listing

Experiment: Toss 2 Coins. Note Faces.

S = {HH, HT, TH, TT}

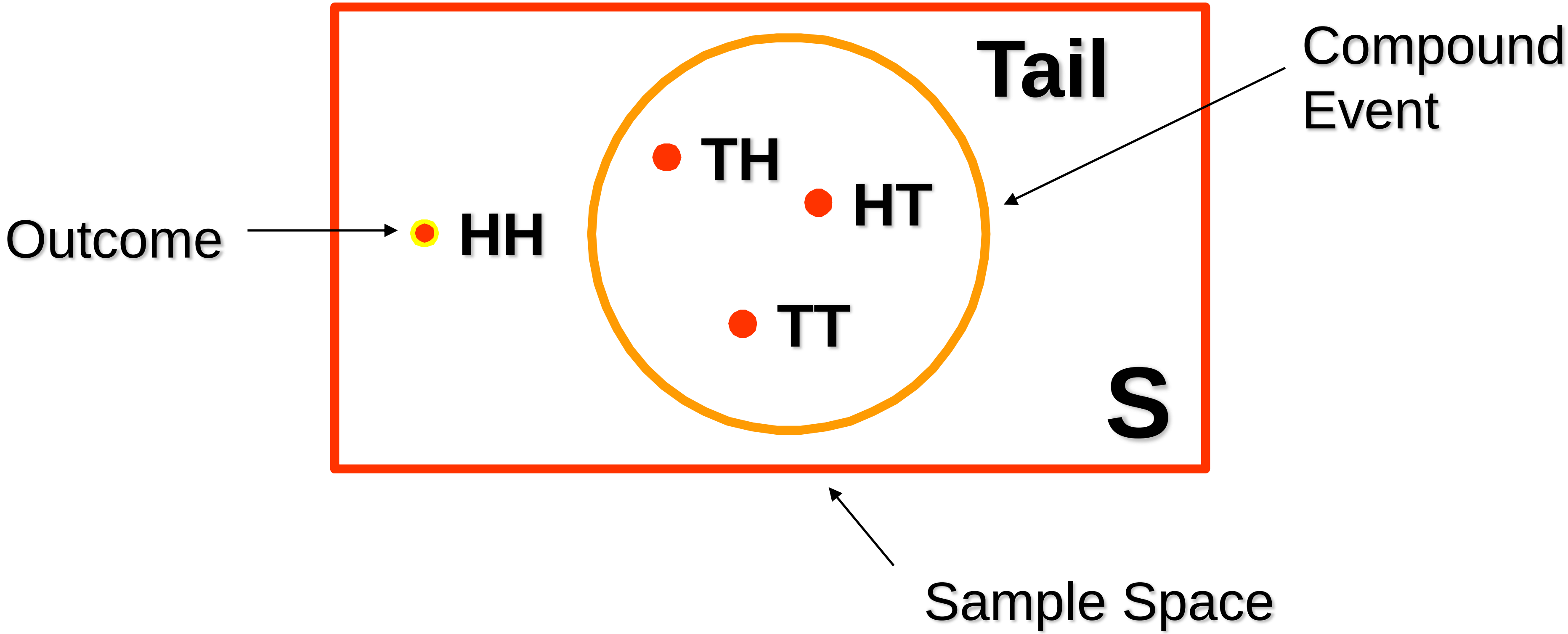


Sample Space

Visualisai; Sample Space Venn Diagram

Experiment: Toss 2 Coins. Note Faces.

S = {HH, HT, TH, TT}



Sample Space

Visualisai; Sample Space Contingency Table
Experiment: Toss 2 Coins. Note Faces.

	2nd Coin		
1st Coin	Head	Tail	Total
Head	HH	HT	HH, HT
Tail	TH	TT	TH, TT
Total	HH, TH	HT, TT	S

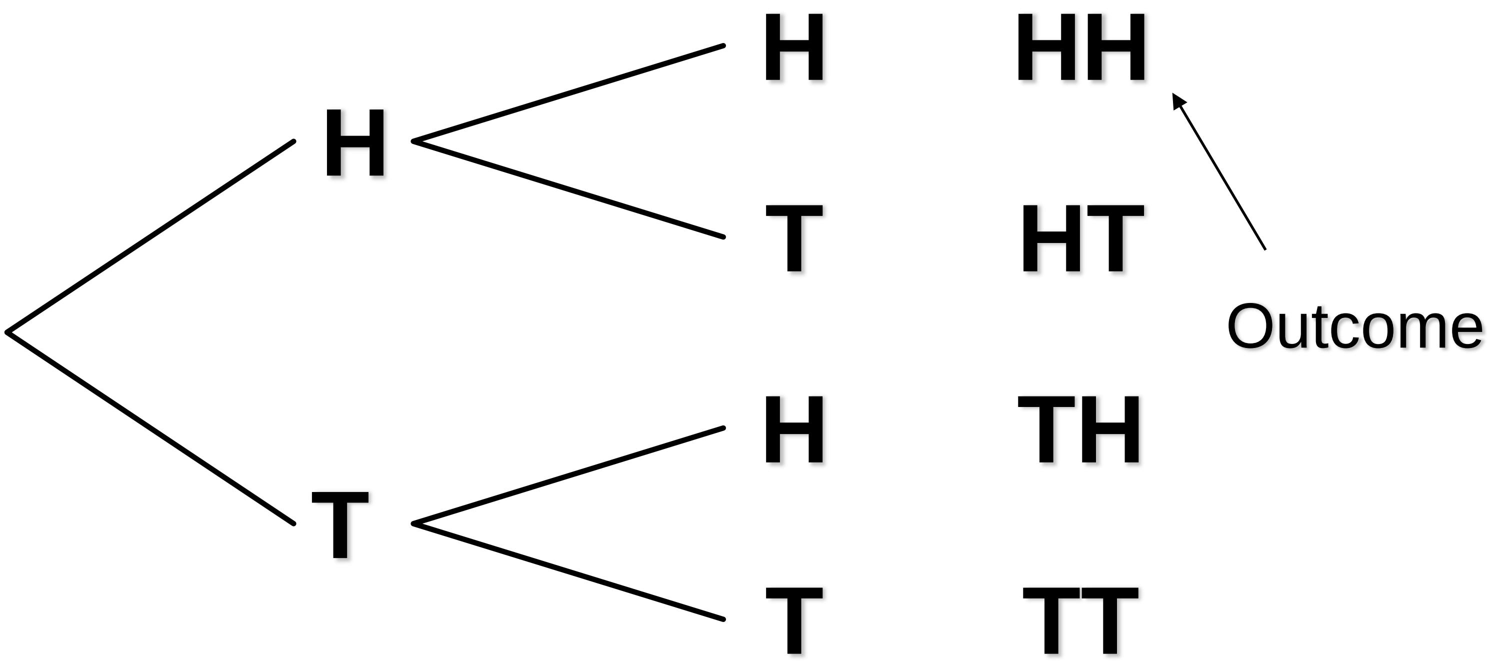
Simple Event (Head on 1st Coin)

Outcome (Count, Total % Shown Usually)

Sample Space

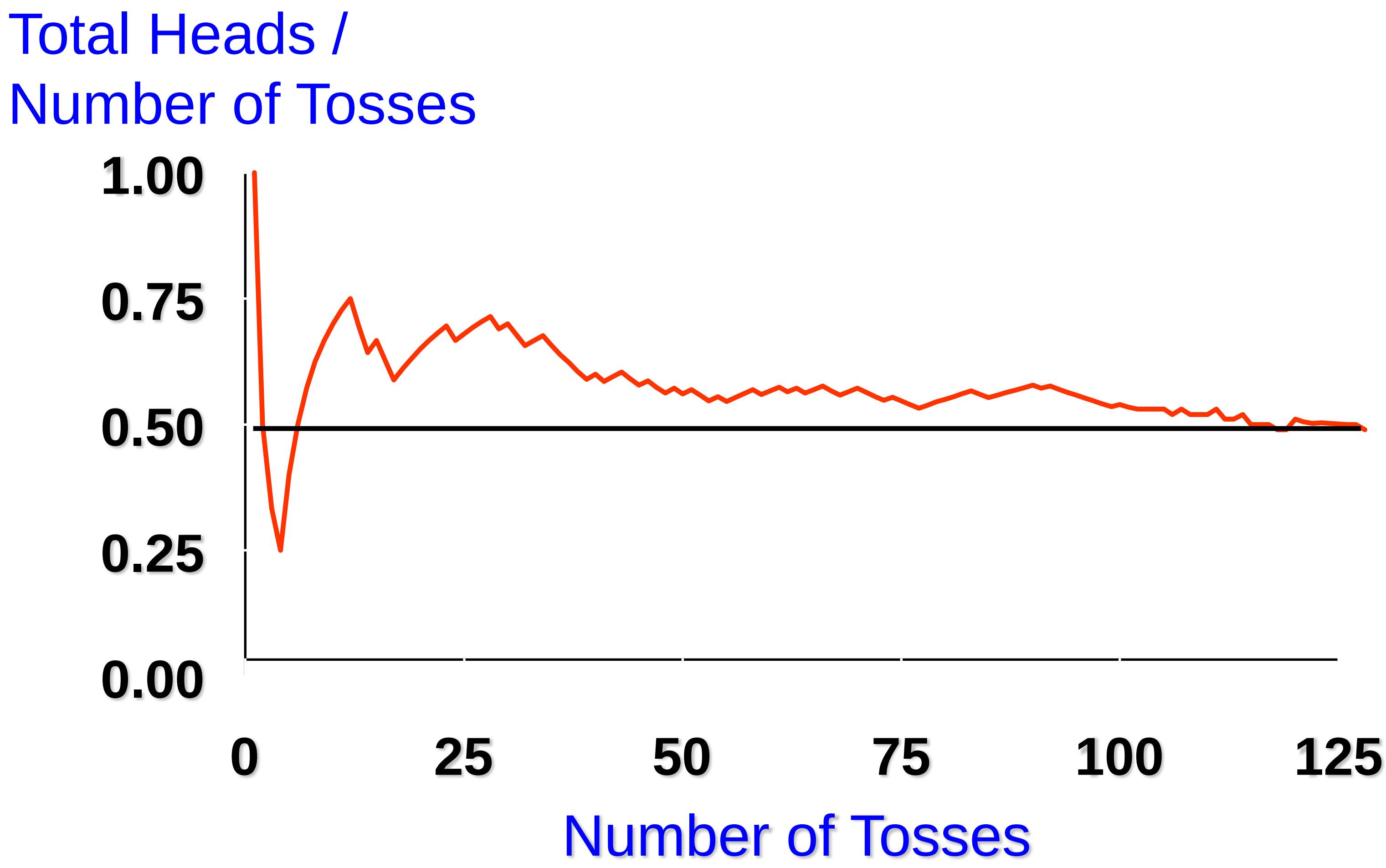
Sample Space

Visualisai; Sample Space Tree Diagram
Experiment: Toss 2 Coins. Note Faces.



Sample Space

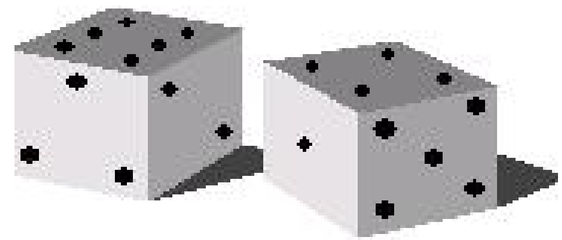
Pengulangan pelemparan uang



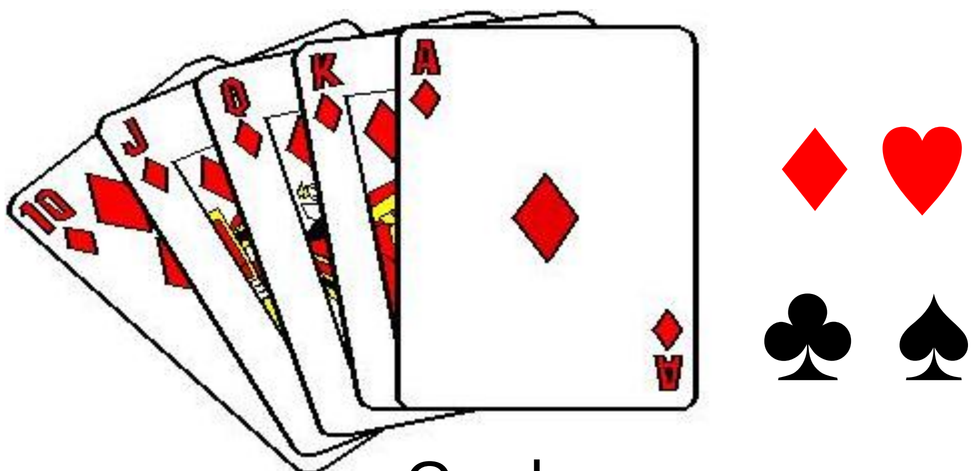
Sample Space

Experiment

Coins



Dies



Cards

Sample Space

Contoh Outcome

Experiment	Sample Space
Toss a Coin, Note Face	Head, Tail
Toss 2 Coins, Note Faces	HH, HT, TH, TT
Select 1 Card, Note Kind	2♥, 2♦, ..., A♣A♠
Select 1 Card, Note Color	Red, Black
Play a Football Game	Win, Lose, Tie
Inspect a Part, Note Quality	Defective, OK
Observe Gender	Male, Female

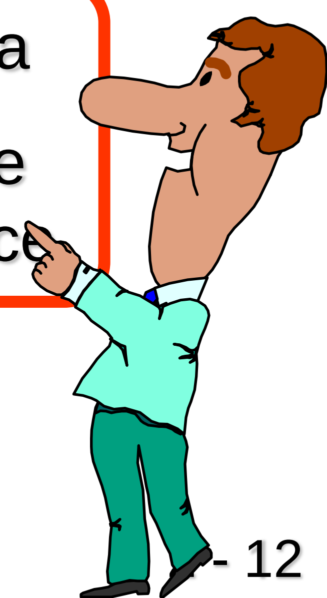
Events

Definisi 2: Event

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sample.

Contoh Bila diketahui ruang sample adalah **S = {t/t ≥ 0}**, dimana S adalah usia komponen (tahun). Maka kejadian A akan rusak sebelum akhir tahun kelima adalah himpunan bagian **A={t/0 ≤ t < 5}**

An event is a subset of the sample space



Events

Contoh percobaan melempar 2 mata uang

Event	Outcomes in Event
Sample Space	**HH, HT, TH, TT**
1 Head & 1 Tail	**HT, TH**
Heads on 1st Coin	**HH, HT**
At Least 1 Head	**HH, HT, TH**
Heads on Both	**HH**

Events

Definisi 3: Complement

Komplemen suatu kejadian A terhadap S ialah himpunan semua unsur S yang tidak termasuk A. Komplemen A disebut dengan **A'.**

Contoh R adalah kejadian bahwa suatu kartu merah terambil dari sekotak kartu bridge yang terisi 52. Maka R' adalah kejadian bahwa kartu terambil bukan berwarna merah (tapi hitam).

Contoh S = {book, catalyst, cigarette, precipitate, engineer, rivet}

A = {catalyst, rivet, book, cigarette}

A' = {precipitate, engineer}

Events

Definisi 4: Intersection

Irisan adalah dua kejadian A dan B, dinyatakan dengan $A \cap B$, ialah kejadian yang unsurnya termasuk dalam A dan B.

Contoh P adalah kejadian bahwa seorang yang dipilih secara acak selagi makan disuatu restoran dekat kampus adalah mahasiswa dan Q menyatakan kejadian bahwa orang yang dipilih tinggal di asrama.

Maka kejadian $P \cap Q$ menyatakan himpunan semua mahasiswa yang makan direstoran tersebut dan tinggal di asrama

Events

Definisi 5: Muttually Exclusive

Dua kejadian A dan B saling terpisah atau meniadakan (disjoint) bila $A \cap B = \varnothing$, artinya A dan B tidak memiliki unsur persekutuan

Contoh sebuah perusahaan pertelevisian menawarkan delapan channel yang berbeda. Tiga diantaranya dari ABC, dua dari NBC , dan satu dari CBS. Yang dua lainnya dari Education chennel dan ESPN Sport channel.

Seorang menghidupkan televisi tanpa terlebih dahulu memilih saluran. Misalkan A kejadian bahwa programnya dari NBC dan B kejadian bahwa programnya dari ESPN. Karena program televisi tidak mungkin berasal dari lebih dari saru channel.

Maka kejadian A dan B tidak mempunyai program yang sama. Maka kejadian A dan B adalah **muttually exclusive**

Events

Definisi 6: Union

Gabungan dua kejadian ***A*** dan ***B***, dinyatakan dengan ***A*** $\cup$ ***B***, ialah kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk ***A*** atau ***B***.

Contoh P kejadian bahwa seorang karyawan yang dipilih secara acak adalah perokok. Misalkan Q kejadian bahwa karyawan yang terpilih peminum alkohol.

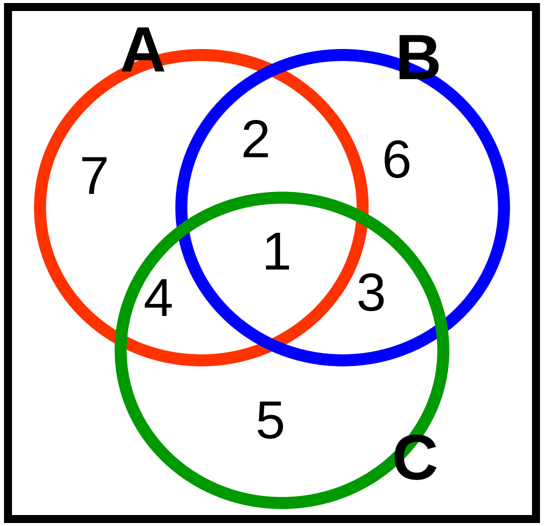
Maka kejadian $P \cup Q$ merupakan himpunan karyawan yang perokok atau peminum, atau kedua dua-duanya.

Contoh $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{b, c, d, e\}$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

Events

Contoh Union



$A \cap B$ = daerah 1 dan 2

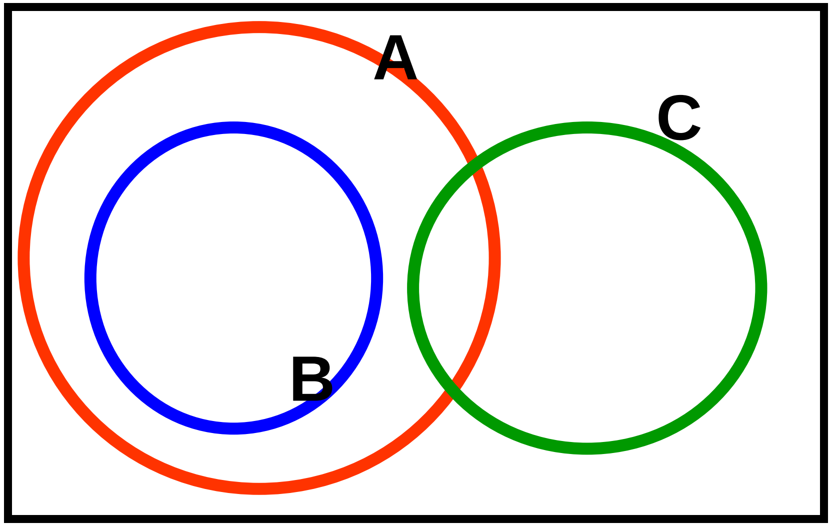
$B \cap C$ = daerah 1 dan 3

$A \cup C$ = daerah 1, 2, 3, 4, 5 dan 7

$B' \cap A$ = daerah 4 dan 7

$A \cap B \cap C$ = daerah 1

$(A \cup B) \cap C'$ = daerah 2, 6 dan 7



$A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$

$A \cup A' = S$, $S' = \emptyset$

$\emptyset' = S$, $(A')' = A$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Menghitung Titik Sample

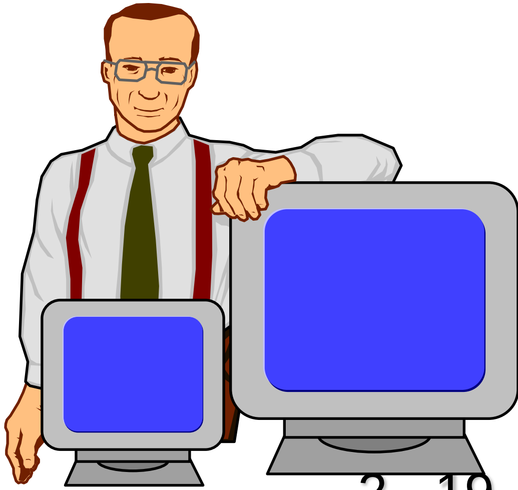
Teorema 1

Bila suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan bila untuk tiap cara ini operasi keduanya dapat dikerjakan denga $\boldsymbol{n_2}$ cara, maka kedua operasi itu dapat dikerjakan bersama-sama dengan $\boldsymbol{n_1 n_2}$ cara.

Contoh suatu developer perumahan menawarkan bagi calon pembeli pilihan exterior rumah gaya; Tudor, Rustic, Colonial, dan Tradisional untuk dibangun dengan lantai Ranch, Two story atau Split level.

Maka banyak pilihan seorang pembeli dapat memesan rumah adalah

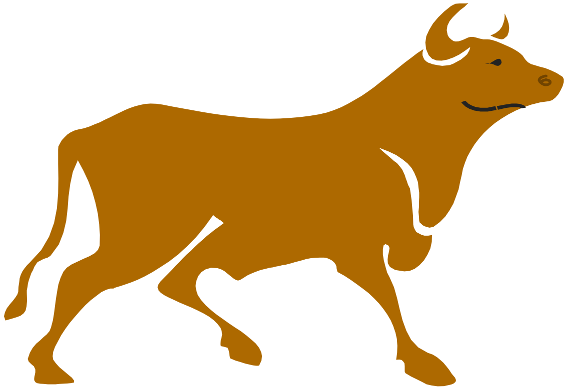
$n_1\, n_2 = (4)(3) = 12$ kemungkinan pilihan



Menghitung Titik Sample

Teorema 2

Bila suatu operasi dapat dikerjakan dengan n_1 cara, dan bila untuk setiap cara ini operasi keduanya dapat dikerjakan dengan n_2 cara, dan bila untuk setiap kedua cara operasi tersebut operasi ketiganya dapat dikerjakan dengan n_3 cara, dan seterusnya, maka deretan k operasi dapat dikerjakan dengan $n_1 n_2 \ldots . n_k$.



Menghitung Titik Sample

Contoh berapa banyak bilangan genap yang terdiri atas tiga angka dapat dibuat dari angka 1, 2, 5, 6 dan 9 bila tiap angka itu hanya boleh digunakan sekali?

Karena bilangan genap terakhirnya hanya ada dua pilihan (2 dan 6), maka $n_1 = 2$, puluhannya terdapat empat pilihan, $n_2 = 4$, dan ratusan terdapat 3, $n_3 = 3$. Maka sebanyak $n_1 n_2 n_3$ = (2)(4)(3) = 24 bilangan genap berangka tiga

Contoh Sam akan merakit komputer untuk dirinya, dia dapat memesan chip dari dua merek, hard drive dari empat jenis, memori dari tiga jenis, dan asesoris dari lima lokal toko.

Maka Sam punya cara untuk memesan komponen sebanyak

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$

Menghitung Titik Sample

Definisi 7: Permutation

Permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari kumpulan obyek yang diambil sebagian atau seluruhnya.

Contoh Ambil tiga huruf a, b, c, maka permutasi yang dapat dibuat adalah abc, acb, bac, bca, cab dan cba.

Bila digunakan teorema 2, maka $n_1 n_2 n_3 = (3)(2)(1) = 6$

Secara umum, ada *n* perbedaan yang dapat disusun, yaitu

$(n)\ (n-1)\ (n-2)\ldots\ldots(3)\ (2)\ (1)$ cara

Menghitung Titik Sample

Teorema 3

Banyaknya permutasi ***n*** obyek yang berlainan adalah ***n!***

Contoh banyaknya permutasi 4 huruf yaitu a, b, c dan d adalah 4! = 24,

Lebih lanjut bila hanya 2 huruf diambil sekaligus adalah ab, ac, ad, ba, bc, ba, ca, cb, cd, da, db, dc.

Apabila menggunakan teorema 2, maka $n_1 n_2 = (4)(3) = 12$

Menghitung Titik Sample

Teorema 4

Banyaknya permutasi ***n*** obyek berlainan bila diambil ***r*** sekaligus adalah

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Contoh Tiga Award (research, teaching, service) diberikan tiap tahun untuk 25 mahasiswa graduate jurusan Statistik. Jika masing-masing mahasiswa hanya dapat memperoleh satu award, maka banyaknya kemungkinan pilihan (titik pada ruang sample) adalah

$$ {}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = (5)(4)(3) = 13.800 $$

Menghitung Titik Sample

Teorema 5

Banyaknya permutasi ***n*** obyek berlainan bila yang disusun secara melingkar adalah (n-1)!

Contoh bila 4 orang bermain bridge, maka permutasinya tidak berbeda bila tiap orang bergesar tempatnya sekali menurut arah jarum jam.

Bila tempat seseorang dibuat tetap dan kemudian tempat orang yang lainnya diatur, maka didapatkan **3!** cara. Yaitu dipertoleh 6 susunan yang berlainan dalam permainan bridge.

Menghitung Titik Sample

Teorema 6

Banyaknya permutasi yang berlainan dari ***n*** obyek bila $\boldsymbol{n_1}$ diantaranya berjenis pertama, $\boldsymbol{n_2}$ berjenis kedua, ...n_k berjenis ke-k adalah.

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots\ldots n_k!}$$

Contoh suatu latihan sekolah sepak bola, dibutuhkan penyerang yang terdiri dari 10 pemain berbaris lurus. Mereka terdiri dari 1 freshman, 2 sophomore, 4 juniors, dan 3 senior. Maka banyaknya susunan yang berlainan adalah

$$\frac{10!}{1!\,2!\,3!\,4!} = 12.600$$

Menghitung Titik Sample

Teorema 7

Banyaknya cara menyekat suatu himpunan ***n*** obyek dalam ***r*** sel, masing-masing berisi $\boldsymbol{n_1}$ unsur dalam sel pertama, $\boldsymbol{n_2}$ unsur dalam sel kedua, dst adalah

$$\begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots n_r \end{bmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots\ldots n_r!}$$

$$\text{dengan } n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$$

Contoh cara menampung 7 petinju dalam 3 kamar hotel, bila 1 kamar bertempat tidur 3, sedang 2 lainnya punya 2 tempat tidur

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3, 2, 2 \end{bmatrix} = \frac{7!}{3!2!2!}$$

$$\text{dengan } 3 + 2 + 2 = 7$$

Menghitung Titik Sample

Teorema 8

Banyaknya kombinasi dari ***n*** obyek yang berlainan bila diambil sebanyak ***r*** sekaligus adalah

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{n!}{r_1!(n-r)!}$$

Perhatian: Kombinasi tidak memperdulikan urutannya, sedangkan permutasi memperdulikan urutannya

Contoh Bila ada 4 kimiawan dan 3 fisikawan, carilah banyaknya panitia 3 orang yang dapat dibuat yang beranggotakan 2 kimiawan dan 1 fisikawan

Memilih 2 kimiawan dari 4

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Memilih 1 fisikawan dari 3

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

Menurut teorema 1, bila $n_1 = 6$ dan $n_2 = 3$

maka $n_1 n_2 = (6)(3) = 18$

Probability and Event

Definisi 8: Probability of an event

Probabilitas suatu kejadian A adalah jumlah bobot semua titik sampel yang termasuk A. Jadi

$$0 \le P(A) \le 1, P(\phi) = 0, \; dan \, P(T) = 1$$

Probability and Event

Contoh suatu dadu diberi bobot sedemikian rupa sehingga probabilitas muncul suatu angka genap dua kali lebih besar dari pada kemungkinan muncul suatu angka ganjil.

Bila K menyatakan kejadian munculnya suatu angka yang lebih kecil dari pada 4 dalam suatu lantunan maka probabilitas ***P(K)*** adalah:

Suatu ruang sample S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Misalkan tiap bobot angka ganjil ***b***, maka bobot tiap angka genap adalah ***2b***, sehingga **9b = 1**, dan bobot 1/9 tiap angka ganjil, 2/9 tiap angka genap. Sehingga untuk K = {1,2,3} dan

P(K) = 1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9

Probability and Event

Contoh suatu dadu diberi bobot sedemikian rupa sehingga probabilitas muncul suatu angka genap dua kali lebih besar dari pada kemungkinan muncul suatu angka ganjil.

Bila kejadian A muncul angka genap dan B muncul angka habis dibagi tiga. Maka $P(A \cup B)$ dan $(A \cap B)$ adalah

$P(A \cup B) = P(2, 3, 4, 6) = 2/9 + 1/9 + 2/9 + 2/9 = 2/7$

$P(A \cap B) = P(6) = 2/9$

Probability and Event

Teorema 9

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan ***N*** macam hasil yang berkemungkinannya sama, dan bila tepat sebanyak ***n*** dari hasil berkaitan dengan kejadian A, maka peluang kejadian ***A*** adalah

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Contoh pada permainan poker, masing-masing pemain memegang 5 kartu. Probabilitas kartu mendapat 2 aces dan 3 jack adalah:

Banyak cara mendapat 2 aces dan 3 jack (proses kombinasi)

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6\,(aces) \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4\,(\,jack\,)$$

- Hitunglah peluang memperoleh kartu hati bila sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge.

Probability and Event

Contoh pada permainan poker, masing-masing pemain memegang 5 kartu. Probabilitas kartu mendapat 2 aces dan 3 jack adalah:

Banyak cara mendapat 2 aces dan 3 jack (proses kombinasi)

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6\,(aces) \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4\,(jack)$$

Menurut teorema 1 terdapat ***n*** = (6) (4) =24 kartu 2 aces dan 3 jack. Banyaknya kartu ditangan sebanyak 5 dari 52 semuanya berkemungkinan sama, yaitu

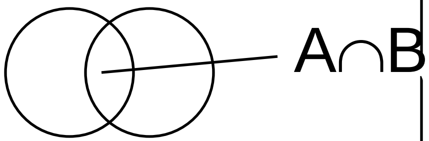
$$\begin{bmatrix} 52 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{52!}{5!\,47!} = 2.598.960$$

Jadi peluang kejadian pemain mendapatkan 2 aces dan 3 jack adalah P(2 aces dan 3 jack)=24/2.598.960=$0{,}9 \times 10^{-5}$

Additive Rule

Teorema 10

Bila A dan B dua kejadian sembarang maka



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Akibat 1: Bila A dan B mutually exclusive, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Akibat 2: Bila A_1, A_2, A_3, ...A_n mutually exclusive, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Akibat 3: Bila $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ dalam satu ruang sampel, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = P(S) = 1$$

Additive Rule

Teorema 11

Untuk tiga kejadian A, B, C

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Contoh probabilitas seorang mahasiswa lulus matematika 2/3 dan probabilitas lulus biologi 4/9, dan probabilitas lulus kedua mata kuliah 1/4. Maka probabilitas lulus paling sedikit satu mata kuliah adalah

$$P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B) = 2/3 + 4/9 - 1/4 = 31/36$$

Additive Rule

Teorema 12

Bila A dan A' kejadian yang berkomplementer, maka

P(A) + P(A') = 1

Contoh bila probabilitas seorang mechanic memperbaiki 3, 4, 5, 6, 7 dan 8 lebih mobil pada setiap hari kerja masing-masing 0,12, 0,19, 0,28, 0,24, 0,10, 0,07.

Probabilitas paling sedikit mechanic memperbaiki paling sedikit 5 mobil pada hari kerja adalah $P(5 \leq E) = 1 - 0,31 = 0,69$

Dimana 0,31 adalah probabilitas kurang dari 5 mobil yang diperbaiki $P(E') = 0,12 + 0,19 = 0,31$

Conditional Probability

Devinisi 9: Conditional Probability

Probabilitas bersyarat ***B*** bila ***A*** diketahui, dinyatakan dalam

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; bila \; P(A) > 0$$

Conditional Probability

Contoh ruang sample menyatakan populasi orang dewasa yang telah lulus kuliah dikelompokan menurut jenis kelamin dan status pekerjaan

	Bekerja	Tak Bekerja	Jumlah
Laki-laki	460	40	**500**
Wanita	140	260	**400**
Jumlah	600	300	**900**

Misal dipilih secara acak untuk dipekerjakan pada perusahaan, maka:

M : laki-laki yang terpilih

E : yang terpilih statusnya bekerja

P = P(M/E) *= 460/600 = 23/30*

$$P(M \mid E) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} =$$

$$\frac{460/900}{600/900} = 23/30$$

Conditional Probability

Contoh probabilitas suatu penerbangan yang telah terjadwal teratur berangkat tepat waktu ***P(D)*** = 0,83, probabilitas sampai tepat waktu ***P(A)*** = *0,82* dan probabilitas berangkat dan sampai tepat waktu ***P(D ∩A)*** = *0,78*. Probabilitas bahwa pesawat (a) sampai tepat waktu bila diketahui berangkat tepat waktu adalah

$$P(A/D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}78}{0{,}83} = 0{,}94$$

Probabilitas pesawat (b) berangkat tepat waktu bila diketahui sampai tepat waktu adalah

$$P(D/A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}78}{0{,}82} = 0{,}95$$

Independent Event

Devinisi 10

Dua kejadian A dan B bebas (independent) jika dan hanya jika ***P(B/A) = P(B)*** dan ***P(A/B) = P(A)***

Independent Event

Contoh percobaan pengambilan kartu yang diambil berurutan dari sekotak kartu dengan pengembalian. Kejadian ditentukan sebagai berikut

A: Kartu pertama terambil aces

B: Kartu kedua sebuah spade.

Kartu pertama dikembalikan, ruang sampel untuk kedua pengambilan terdiri atas 52 kartu, berisi 4 aces dan 13 spade

Probabilitas kartu kedua terambil spade setelah kartu pertama terambil aces dengan pengembalian adalah kejadian yang bebas, yaitu ***P(B/A)*** *= 13/52 = 1/4* dan ***P(B)*** *= 13/52 = 1/4*

Probabilitas kartu kedua terambil aces setelah kartu pertama terambil spade

P(A/B) *= 4/52 = 1/13 dan* ***P(A)*** *= 1/13*

Multiplicative Rules

Teorema 13

Bila kejadian A dan B dapat terjadi pada suatu percobaan, maka $\boldsymbol{P(A \cap B)=P(A)P(B/A)}$

Dimana tidak jadi soal kejadian yang mana disebut ***A*** dan yang disebut ***B***.

Contoh terdapat 20 fuse dalam sebuah kotak, lima diantaranya cacat. Dua fuse diambil dari kotak satu demi satu tanpa mengembalikan yang pertama, maka probabilitas kedua fuse cacat

A: kejadian fuse yang pertama cacat

B: kejadian fuse yang kedua cacat

Maka peluang kedua fuse cacat

$\boldsymbol{P(A \cap B)} = P(A)\,P(B|A) = (5/20)(4/19) = 1/19$

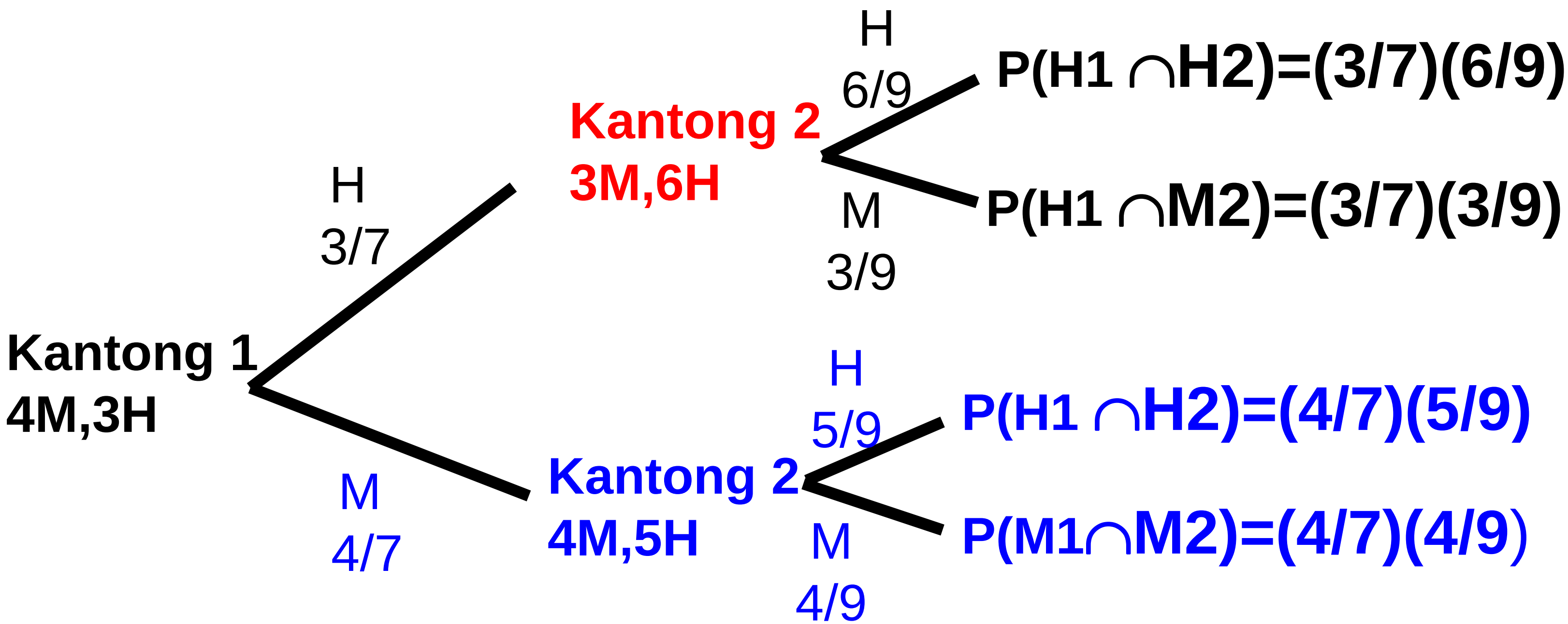
Multiplicative Rules

Contoh suatu kantong terdiri dari 4 bola merah dan 3 bola hitam, dan kantong kedua berisi 3 bola merah dan 5 bola hitam. Satu bola diambil dari kantong pertama dan dimasukkan tanpa melihatnya ke kantong ke dua. Berapa probabilitas mengambil 1 bola hitam dari kantong kedua.

Misal ***H1, H2, M1*** masing-masing manyatakan mengambil 1 bola hitam dari kantong pertama, mengmbil 1 bola hitam dari kantong ke dua, dan mengambil 1 bola merah dari kantong pertama. Gabungan dari kedua kejadian

H1 $\cap$ H2 dan M1 $\cap$H1

Multiplicative Rules



Maka

P[(H1∩H2) atau ***(M1∩H1)] =***

= P(H1 ∩ H2) + P(M1 ∩ H2)

=P(H1) P(H2/H1) + P(M1) P(H2/M2)

=(3/7)(6/9) + (4/7)(5/9) = 38/63

Multiplicative Rules

Teorema 14

Dua kejadian ***A*** dan ***B*** bebas jika dan hanya jika

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

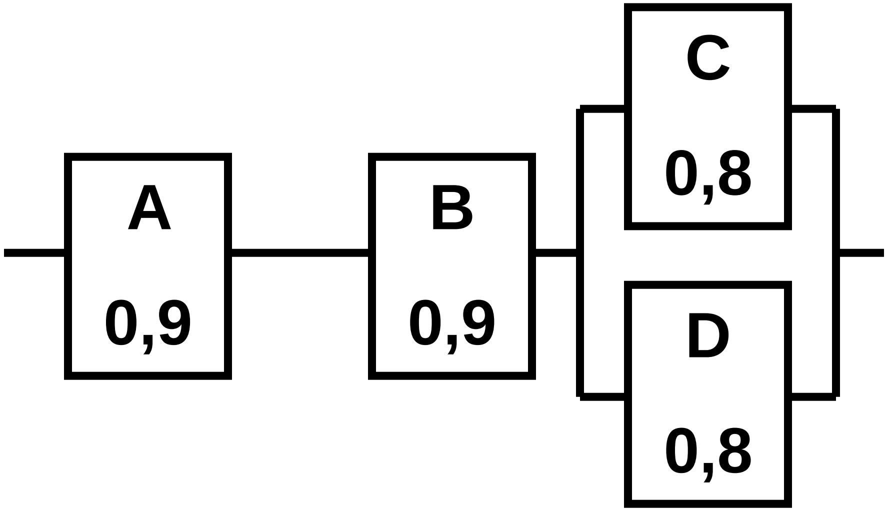
Contoh suatu kota memiliki satu mobil pemadam dan satu mobil ambulan. Probabilitas mobil pemadam siap pada waktu diperlukan 0,98, probabilitas ambulan siap pada waktu dipanggil 0,92.

Maka dalam sebuah kecelakaan, peluang keduannya siap

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0{,}98)(0{,}92) = 0{,}9016$

Multiplicative Rules

Contoh suatu sistem elektronik terdiri dari empat komponen yang akan bekerja apabila komponen A dan B bekerja, dan salah satu dari C dan D bekerja, masing-masing memiliki probabilitas bekerja



Multiplicative Rules

Semua kejadian dari keempat komponen tersebut bebas.

a. Probabilitas seluruh sistem bekerja adalah

$\boldsymbol{P(A \cap B \cap (C \cup D))} = P(A)P(B)P(C \cup D) = P(A)P(B)(1-P(C' \cap D'))$

$= P(A)P(B)(1-P(C')P(D'))$

$= (0,9)(0,9)(1-(1-0,8)(1-0,8)=0,7776$

b. Probabilitas bersyarat komponen C tidak bekerja, pada kondisi seluruh sistem bekerja

$$P = \frac{\mathrm{P(Sistem\ bekerja\ tapi\ C\ tidak\ bekerja)}}{\mathrm{P(Sistem\ bekerja)}}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap C' \cap D)}{P(\mathrm{Sistem\ bekerja})} = \frac{(0{,}9)(0{,}9)(1-0{,}8)(0{,}8)}{0{,}7776} = 0{,}1667$$

Multiplicative Rules

Teorema 15

Bila kejadian $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ terjadi

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_k)$

$= P(A_1)P(A_2 \backslash A_1)P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k \backslash A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$

Jika kejadian $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ saling bebas (independent)

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_k) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) \ldots.\, P(A_k)$

Multiplicative Rules

Soal Bila kartu diambil tanpa pengembalian. A_1 adalah kartu pertama terambil ace merah, A_2 adalah kartu kedua terambil 10 atau Jack, A_3 adalah kartu lebih besar dari 3 dan kurang dari 7

Probabilitas kejadian $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ adalah

$P(A_1) = 2/52$, $P(A_1 \backslash A_2) = 8/51$, $P(A_3 \backslash A_2 \backslash A_1) = 12/50$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \backslash A_1)P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2)$$

$$= (2/52)(8/51)(12/50) = 8/5525$$

Baye's Rule

Contoh Seksi 2.6

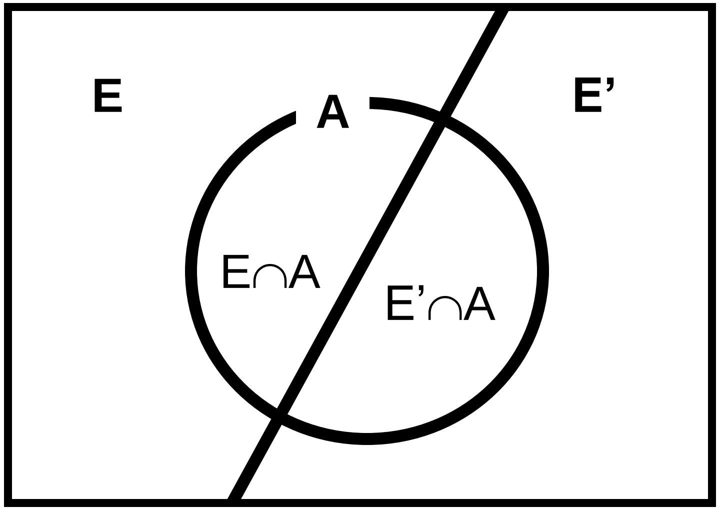
	Bekerja	Tak Bekerja	Jumlah
Laki-laki	460	40	500
Wanita	140	260	400
Jumlah	600	300	900

Keterangan tambahan, bahwa 36 dari yang bekerja dan 12 yang tidak bekerja adalah anggota club.

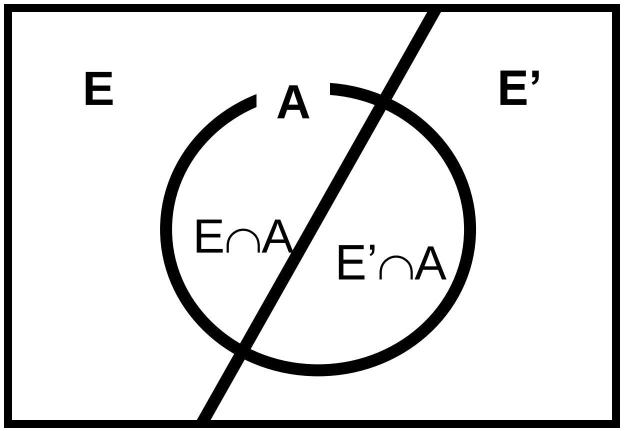
M = laki-laki yang terpilih

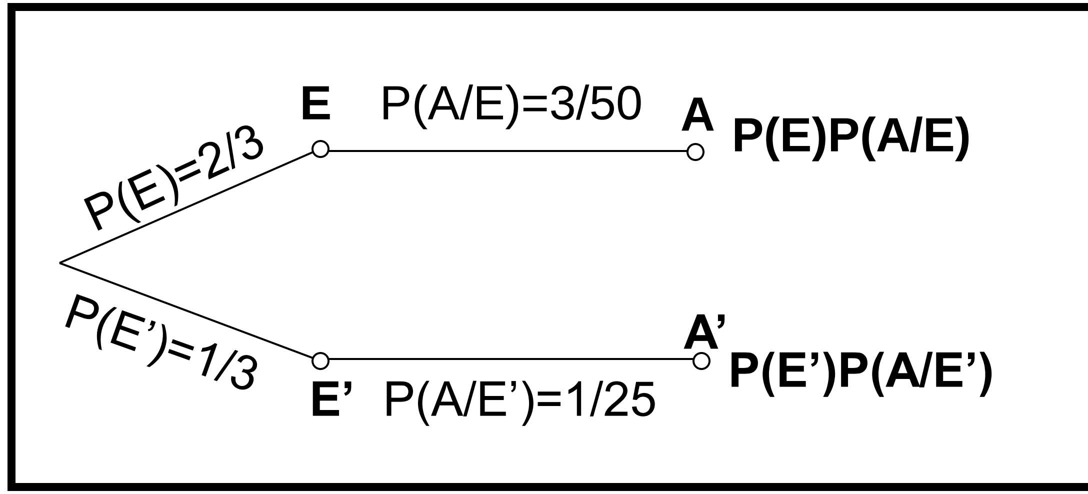
E = Orang yang terpilih statusnya bekerja

A = Orang yang terpilih anggota club



Baye's Rule





$$P(E)=\frac{600}{900}=\frac{2}{3}, \quad P(A/E)=\frac{36}{600}=\frac{3}{50}$$

$$P(E')=\frac{300}{900}=\frac{1}{3}, \quad P(A/E')=\frac{12}{300}=\frac{1}{25}$$

$$P(A)=P[(E\cap A)\cup(E'\cap A)]$$

$$(lihat\ \ teorema\ \ 2.10\ \&\ 2.13)$$

$$=P(E\cap A)+(E'\cap A)$$

$$=P(E)P(A/E)+P(A/E')$$

$$P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{50}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{25}\right)=\frac{4}{75}$$

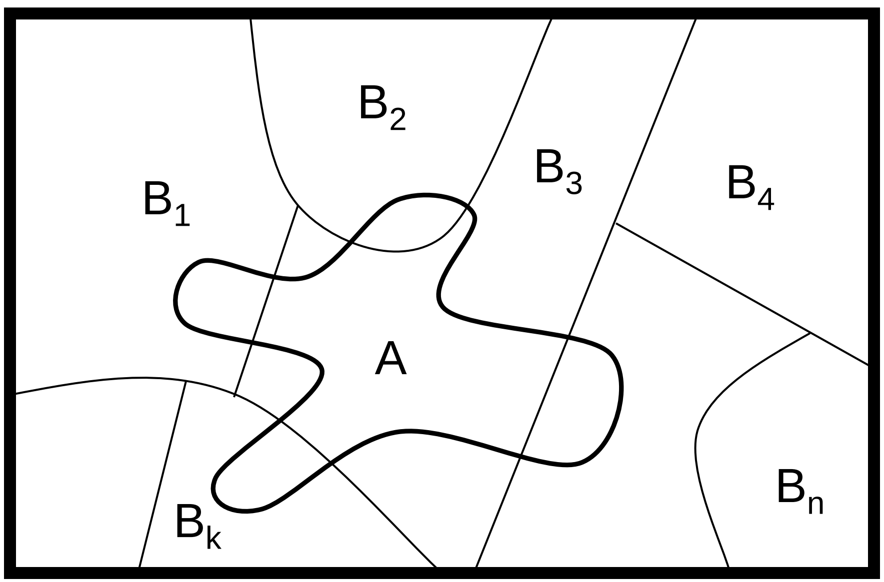
Baye's Rule

Teorema 16

Bila kejadian $\mathbf{B_1, B_2, \ldots .B_k}$ merupakan suatu sekatan (partition) dari sample space **S** dengan $\mathbf{P(B_1) \neq 0}$ untuk

1 = 1,2, …k, maka untuk setiap kejadian **A** dari **S**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)(A / B_i)$$



Baye's Rule

Teorema 16

Dengan melihat akibat 2 teorema 11 dqn 13 maka

$$P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup .... \cup (B_k \cap A)]$$
$$= P[(B_1 \cap A) + (B_2 \cap A) + ... \cup (B_k \cap A)]$$
$$= \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A / B_i)$$

Baye's Rule

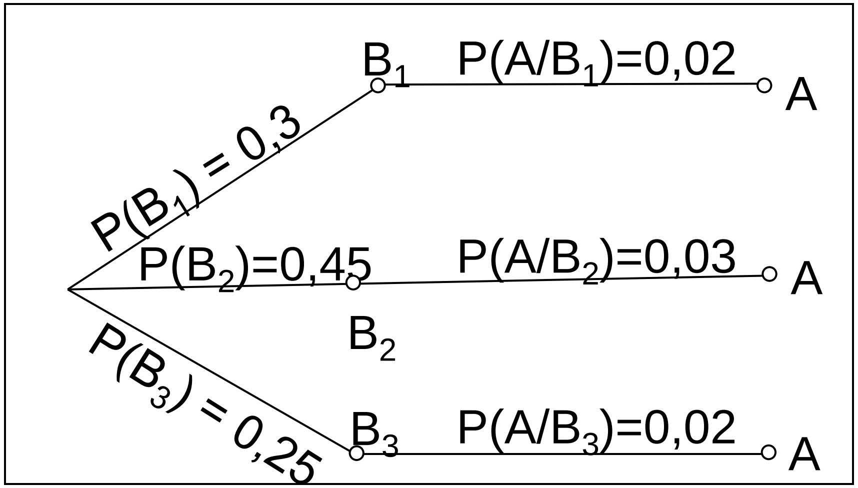
Contoh pada perusahaan perakitan, tiga mesin B_1, B_2, B_3 memiliki prosentasi membuat produk berturut-turut 30%,45% dan 25%. Diketahui dari pengalaman masing-masing mesin kemungkinan menghasilkan produk cacat 2%,3% dan 2%.Bila produk diambil secara acak, berapa probabilitas produk diambil cacat?

A: Produk adalah cacat

B_1: produk dibuat oleh mesin B_1

B_2: produk dibuat oleh mesin B_2

B_3: produk dibuat oleh mesin $B_{3,,}$ maka



$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)$$

$$P(B_1)P(A/B_1) = (0{,}3)(0{,}02) = 0{,}006,$$

$$P(B_2)P(A/B_2) = (0{,}45)(0{,}03) = 0{,}0135,$$

$$P(B_3)P(A/B_3) = (0{,}25)(0{,}02) = 0{,}005,$$

$$P(A) = 0{,}006 + 0{,}0135 + 0{,}005 = 0{,}0245$$

Baye's Rule

Teorema 17: (Baye's Rule)

Bila kejadian $\mathbf{B_1, B_2, \ldots. B_k}$ merupakan suatu sekatan (partition) dari sample space **S** dengan $\mathbf{P(B_1) \neq 0}$ untuk 1 = 1,2, …k, Misalkan **A** Suatu kejadian sembarang dalam **S** dengan P(A) ≠ 0, maka

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i-k}^{k} P(B_1 \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A / B_r)}{\sum_{i-k}^{k} P(B_1)P(A / B_i)} \quad untuk \quad r = 1,2,\ldots\ldots k$$

Bukti: Menurut definisi probabilitas bersyarat

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$$

Menurut teorema (16)

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)}$$

Menurut teorema (13)

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r)P(A / B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A / B_i)}$$

Baye's Rule

Contoh seperti sebelumnya, jika produk diambil secara random dan ditemukan produk tersebut cacat. Probabilitas produk cacat tersebut dari mesin B_3 adalah

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3)P(A/B_3)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)}$$

$$P(B_3/A) = \frac{0{,}005}{0{,}006 + 0{,}0135 + 0{,}005} = \frac{0{,}005}{0{,}0245} = \frac{10}{49}$$