

MODUL

PERSAMAAN BEDA

I. Tujuan

1. Peserta mengerti cara menyelesaikan persamaan beda dengan reekursif dan metode langsung
2. Peserta dapat menggunakan tool Matlab untuk menyelesaikan persamaan beda untuk sinyal masukan yang berbeda-beda
3. Peserta dapat mengimplementasikan permasalahan persamaan beda dengan GUIDE

II. Perangkat Yang Diperlukan

- 1 set PC yang dilengkapi dengan software Matlab

III. Teori

Sebuah sistem LTI bisa dinyatakan melalui **persamaan beda**:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M]$$
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

dengan $x[n]$ adalah sinyal masukan, $y[n]$ adalah sinyal keluaran, dan a_k dan b_k adalah konstanta.

Contoh:

Suatu sistem LTI, hubungan sinyal masukan dan keluaran dideskripsikan dengan persamaan beda sebagai berikut:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

dengan $x[n] = 4^n u[n]$. Dapatkan solusi dari persamaan beda tersebut, kemudian gambarkan sinyal masukan dan sinyal kelurannya untuk $n=1, \dots, 10$, dan $n=100$, serta $n=200$.

Untuk menyelesaikan persamaan diatas dapat dilakukan dengan 3 cara, yaitu: secara reekursif, secara langsung (mendapatkan solusi homogeny dan partikulirnya) , dan secara tidak langsung (menggunakan transformasi-z).

a) Metode reekursif

Metode reekursif adalah metode yang menggunakan nilai pada waktu yang lalu untuk mendapatkan nilai yang sekarang, sehingga dibutuhkan nilai awal dalam proses pengerjaannya. Metode reekursif dijalankan mulai dari $n=0$.

Kelemahan dari metode ini, untuk mendapat sinyal keluaran saat n , dibutuhkan informasi dari sinyal keluaran yang lalu, pada saat $n-k$.

Pada contoh diatas, untuk mendapatkan solusi persamaan beda menggunakan metode reekursif, persamaan tersebut dibentuk sebagai berikut:

$$y[n] = 3y[n-1] + 4y[n-2] + 4^n u[n] + 2(4^{n-1} u[n-1])$$

$$\text{Untuk } n=0 \rightarrow y[0] = 3y[-1] + 4y[-2] + 4^0 u[0] + 2(4^{-1} u[-1])$$

Untuk nilai $y[-1]$ dan $y[-2]$ diberi nilai 0. Ini yang disebut dengan nilai awal. Jika dalam sistem LTI, keadaan demikian sistem dalam keadaan berelaksasi. Jadi dieprolh untuk $n=0$:

$$y[0] = 1$$

$$\begin{aligned}\text{Untuk } n=1 &\rightarrow y[1] = 3y[0] + 4y[-1] + 4^1 u[1] + 2(4^0 u[0]) \\ &= 3(1) + 0 + 4 + 2 = 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Untuk } n=2 &\rightarrow y[2] = 3y[1] + 4y[0] + 4^2 u[2] + 2(4^1 u[1]) \\ &= 3(9) + 4(1) + 16 + 8 = 55\end{aligned}$$

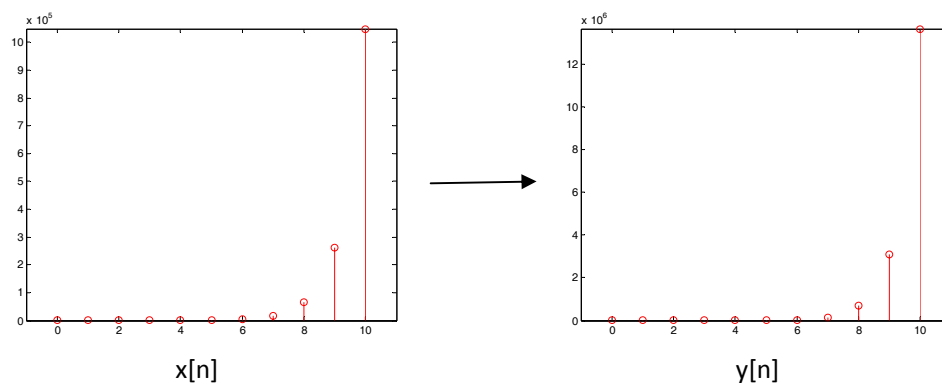
⋮

$$\begin{aligned}\text{Untuk } n=10 &\rightarrow y[10] = 3y[9] + 4y[8] + 4^{10} u[10] + 2(4^9 u[9]) \\ &= 3(3103785) + 4(697303) + 1048576 + 524288 = 13673431\end{aligned}$$

Jadi untuk $n=0$ sampai $n=10$, untuk sinyal masukan $x[n]=4^n u[n]$ pada sistem yang digambarkan dengan persamaan beda diatas, nilai keluarannya adalah:

$$y[n] = \{1 \ 9 \ 55 \ 297 \ 1495 \ 7209 \ 33751 \ 154665 \ 697303 \ 3103785 \ 13673431\}$$

Secara grafik:



Sedangkan untuk mendapatkan nilai $n=100$ dan $n=200$, kita harus menghitung terlebih dahulu nilai $y[99]$ dan $y[199]$, dimana nilai tersebut dapat diperoleh dari nilai y pada n sebelumnya.

b) Metode Langsung

Metode langsung adalah dengan mendapatkan solusi homogen dan solusi partikular dari persamaan beda.

Solusi homogen:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = 0$$

Persamaan karakteristik:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

$$(z+1)(z-4) = 0$$

$$z_1 = -1, z_2 = 4$$

Jadi solusi homogen adalah :

$$y_h(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n$$

Solusi partikular:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = 4^n u[n] + 2(4^{n-1} u[n-1])$$

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = 4^n + 2(4^{n-1}), \quad n \geq 0$$

Karena $x[n]=4^n u[n]$ (sinyal eksponensial), maka terkaan solusi partikular adalah:

$$y_p(n) = A(4)^n$$

Karena gagal memenuhi kondisi sistem, maka permisalan solusi partikel adalah:

$$y_p(n) = An(4)^n$$

Untuk mendapatkan nilai A, permisalan tersebut dimasukkan ke sistem, sehingga diperoleh

$$A = \frac{6}{5}$$

Jadi solusi total dari persamaan beda pada sistem diatas adalah :

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

$$y(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n + \frac{6}{5}n4^n$$

Untuk mendapatkan nilai c_1 dan c_2 , pada solusi total diatas diset untuk nilai $n=0$ dan $n=1$ sehingga akan ditemukan nilai $y(0)$ dan $y(1)$, kemudian nilai ini disamakan dengan persamaan beda pada sistem untuk $n=0$ dan $n=1$ juga, sehingga akan ditemukan nilai c_1 dan c_2 .

Dari perhitungan akan ditemukan solusi total sebagai berikut:

$$y(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n4^n$$

Dengan ditemukannya solusi diatas, maka untuk mengetahui sinyal keluaran untuk n berapapun dari sinyal masukan $x[n]=4^n$ dapat dengan mudah ditemukan:

$$\text{Untuk } n=2 \rightarrow y(2) = -\frac{1}{25}(-1)^2 + \frac{26}{25}(4)^2 + \frac{6}{5}(2)(4)^2 = 55$$

$$\text{Untuk } n=10 \rightarrow y(10) = -\frac{1}{25}(-1)^{10} + \frac{26}{25}(4)^{10} + \frac{6}{5}(10)(4)^{10} = 13673431$$

$$\text{Untuk } n=100 \rightarrow y(100) = -\frac{1}{25}(-1)^{100} + \frac{26}{25}(4)^{100} + \frac{6}{5}(100)(4)^{100} = 1.945 \times 10^{62}$$

$$\text{Untuk } n=1000 \rightarrow y(200) = -\frac{1}{25}(-1)^{200} + \frac{26}{25}(4)^{200} + \frac{6}{5}(200)(4)^{200} = 6.2243 \times 10^{122}$$

c) Metode Tak Langsung

Untuk metode langsung dilakukan dengan menggunakan transformasi-z. Pembahasan dapat di lihat pada modul transformasi-z

IV. Langkah Percobaan

Matlab menyediakan fasilitas (tool) untuk menyelesaikan persamaan beda pada sistem LTI, yaitu menggunakan fungsi filter. Penyelesaian disini adalah nilai sinyal keluaran untuk nilai n tertentu.

Misal persamaan beda pada contoh diatas akan diselesaikan menggunakan tool matlab

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Dengan $x[n] = 4^n u[n]$.

Tuliskan coding program m-file berikut beri nama pers_beda.m:

```
clc;
clear;
a=[1 -3 -4];           %koefesian pada y[n]
b=[1 2];               %koefesian pada x[n]
n=0:10;                %membangkitkan nilai n(waktu)
x=4.^(n);              %sinyal masukan--> sinyal eksponensial
y=filter(b, a, x);      %nilai sinyal keluaran

%menampilkan hasil
disp('nilai sinyal masukan untuk persamaa beda adalah:')
disp(x)
disp('nilai sinyal keluaran dari persamaa beda adalah:')
disp(y)

%gambar 2 grafik dalam 1 form
subplot(2,1,1)
stem(n, x, 'b')
title('sinyal masukan')
subplot(2,1,2)
stem(n, y, 'r')
title('sinyal keluaran')
```

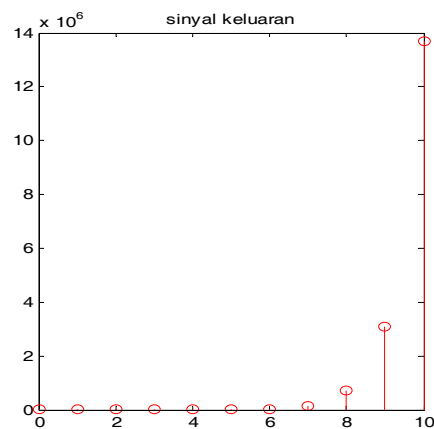
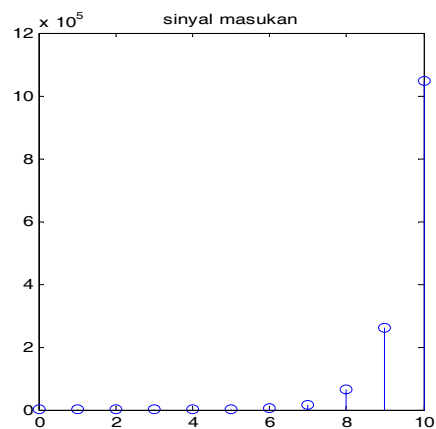
Hasil running adalah:

nilai sinyal masukan untuk persamaa beda adalah:

1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
---	---	----	----	-----	------	------	-------	-------	--------	---------

nilai sinyal keluaran dari persamaa beda adalah:

1	9	55	297	1495	7209	33751	154665	697303	3103785	13673431
---	---	----	-----	------	------	-------	--------	--------	---------	----------



Coba anda ulangi langkah-langkah program di atas untuk sistem yang terdapat pada soal latihan pada perkuliahan teori dengan sinyal masukan yang berbeda-beda. Untuk sinyal masukan gunakan semua sinyal dasar yang telah diajarkan, yaitu mulai sinyal cuplik satuan, langkah satuan, eksponensial, sinus, dan random. Lakukan analisis kemudian simpulkan! Wajib menggunakan **GUIDE**

Petunjuk:

Layout dari guide sekurang-kurangnya dalam bentuk sebagai berikut (desain sesuai dengan selera masing-masing):

