Konvolusi

Teknik-Teknik Analisis Sistem Linear (LTI System)

Terdapat 2 metode dasar untuk menganalisis sikap atau respon sistem linear terhadap sinyal masukan tertentu :

Konvolusi Sinyal

solusi langsung dari persamaan masukan-keluaran untuk sistem

$\Downarrow$

Persamaan beda (diffrence eq.)

KONVOLUSI

- Rumus konvolusi muncul dari adanya sifat linieritas dan invarian waktu pada sistem. Sebagai konsekwensinya, respon sistem terhadap setiap sinyal masukan yang berubah-ubah dapat dinyatakan dari segi respon **cuplikan unit** sistem

- Misal dipunyai sinyal x[n] yang berubah-ubah , maka x[n] dapat didekomposisi menjadi jumlahan bobot(skala) deret cuplikan unit yang digeser (**impuls**)

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- **Contoh.** Perhatikan kasus barisan berhingga sbb:

$$x[n] = \{2, \underset{\uparrow}{4}, 0, 3\}$$

Pisahkan x[n] menjadi jumlah bobot deret impuls!

RUMUSAN KONVOLUSI

Misal , jika sinyal masukan x[n] dinyatakan sebagai jumlahan bobot impuls , yakni:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Maka, respon sistem terhadap x[n] adalah jumlah bobot keluaran yang tepat, yakni

$$y[n] = T\left[x[n]\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\left[\delta[n-k]\right]$$

Jika respon sistem LTI terhadap deret cuplikan unit, $\delta[n]$, dinotasikan dengan h[n], yakni: $h[n] = T\left[\delta[n]\right]$, maka dengan sifat invarian waktu, respon sistem terhadap tunda deret cuplikan unit (**respon impuls**), $\delta[n-k]$, adalah

$$h[n-k] = T\left[\delta[n-k]\right]$$

Sehingga, persamaan diatas dapat ditulis sbb:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Rumus konvolusi

Masukan x[n] berkonvolusi dgn h[n] untuk menghasilkan keluaran y[n]

KONVOLUSI

Jadi

- ✓ Konvolusi menggabungkan tiga buah sinyal → sinyal masukan, sinyal keluaran, dan respon impuls
- ✓ Konvolusi adalah cara matematik untuk mengkombinasikan dua buah sinyal menjadi sinyal dalam bentuk lain.
- ✓ Notasi Konvolusi

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Konvolusi bersifat komutatif

$$y[n] = h[n] * y[n]$$

KONVOLUSI

Langkah-langkah Konvolusi y(n)=x[n]*h[n]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

a) **Pencerminan(folding)**. Cerminkan h[k] pada k=0 untuk memperoleh h[-k]

b) **Pergeseran (Shifting**). Geser h[-k] dengan n_0 ke kanan (kiri) jika n_0 positif (negatif) untuk memperoleh $h[n_0-k]$

c) **Perkalian (multiplication)**. Kalikan x[k] dengan $h[n_0-k]$ untuk memperoleh produk $v_{n0}[k]=x[k]h[n_0-k]$

d) **Penjumlahan(summation)**. Jumlahkan seluruh nilai deret produk $v_{n0}[k]$ untuk memperoleh nilai pada waktu $n=n_0$

CONTOH KONVOLUSI

Respon impuls dari suatu sistem LTI adalah

$$h[n] = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$$

Tentukan respon sistem terhadap sinyal masukan

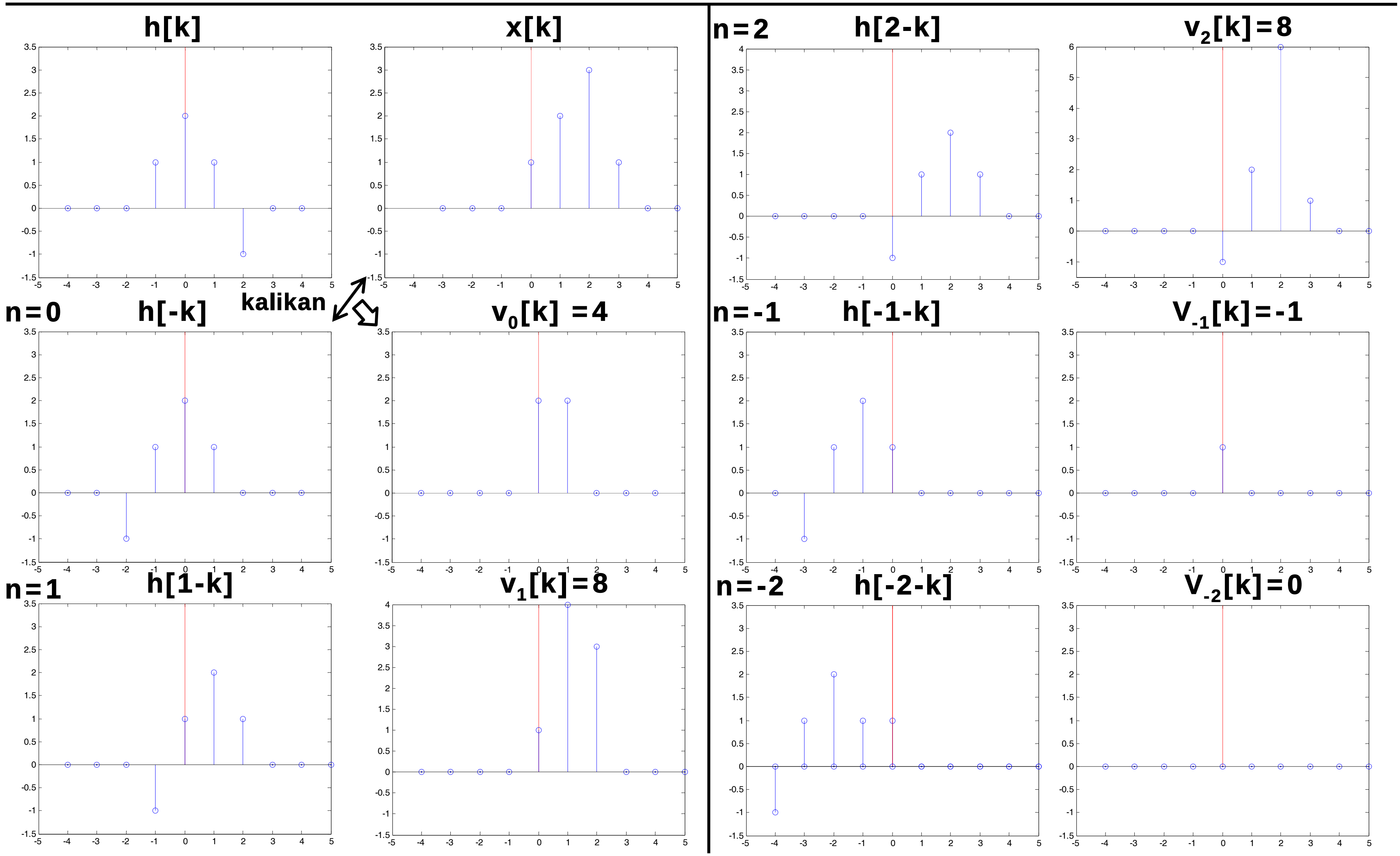
$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$$

Penyelesaian:

Untuk menjawab permasalahan diatas dapat dilakukan
Dengan 2 cara → secara grafik dan secara analitik

Proses KONVOLUSI

$h[n]=\{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$ $x[n]=\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$



$$x[k]*h[k]=\{\ldots, 0, 0, 1, \underset{\uparrow}{4}, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \ldots\}$$

Proses KONVOLUSI

x[n]={1, 2, 3,1} h[n]={1, 2, 1,-1}

Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 , 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={1, 2 , 1, -1}

Pembalikan sinyal kedua

Sinyal pertama : {1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={-1 , 1, 2, 1}

Pergeseran n=0 & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 , 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={-1 , 1, 2, 1}

Product & sum : {0, 0, 2, 2, 0, 0}=4

Pergeseran n=-1 & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 , 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={-1 , 1, 2, 1}

Product & sum : { 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}=1

Pergesearan n=-2 & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 ,3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={ -1, 1, 2, 1}

Product & sum : {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} = 0

Pergesearan n=1 & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]= {1, 2, 3,1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1,1, 2, 1}

Product & sum : {0, 1, 4, 3, 0} = 8

Pergesearan empat step & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]= { 1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1,1, 2, 1}

Product & sum : {-1, 2, 6, 1} = 8

Pergesearan lima step & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]={1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1 ,1, 2, 1}

Product & sum : {0,-2, 3, 2, 0} = 3

Pergesearan enam step & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]={1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1 ,1, 2, 1}

Product & sum : {0, 0,-3, 1, 0, 0} =-2

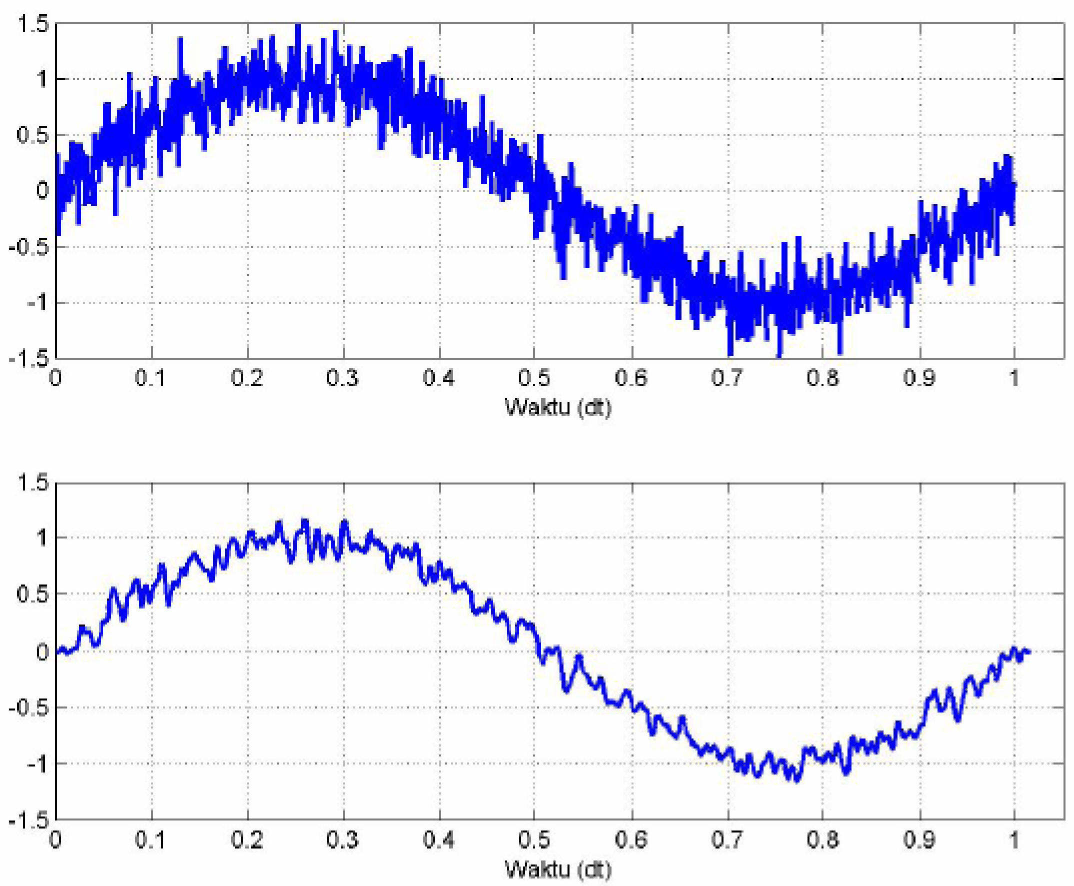
Pergesearan tujuh step & penjumlahan

Sinyal pertama : x[n]={1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1 ,1, 2, 1}

Product & sum : {0, 0, 0,-1, 0, 0, 0} = -1

x[k]*h[k]={0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1}

Proses pemfilteran dengan KONVOLUSI pada sinyal bernoise



konvolusi dapat digunakan pada proses pemfilteran

SOAL LATIHAN

1. Diketahui fungsi sinyal sebagai berikut :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & untuk \quad 0 \le n < 3 \\ 2 & untuk \quad n = 3 \\ 0 & untuk \quad n > 3 \end{cases}$$

   Jika respon impuls, h[n]={1,1,2}, maka tentukan keluaran y[n] !

2. Dari soal no. 1, bila h[n]={0,0,2,1,0}, maka tentukan y[n]!

3. Tentukan respon sistem yang memiliki respon impuls

$$\mathrm{h[n]} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \mathrm{u(n)}$$

   terhadap sinyal masukan

$$\mathrm{x[n]} = 2^{\mathrm{n}}\, \mathrm{u(n)}$$

Persamaan Beda

Sebuah sistem LTI bisa dinyatakan melalui persamaan beda:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k] \qquad (1)$$

Jika $a_N \neq 0$, maka persamaan beda berorde-N

Pers. (1) dapat ditulis sbb:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k \, y[n-k] \qquad (2)$$

Penyelesaian persamaan beda ini dalam bentuk:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

Bagian homogen

Bagian partikulir

SOLUSI HOMOGEN

(respon masukan nol)

Solusi homogen diperoleh dengan meng-nol-kan bagian kiri dari pers. (1). Bentuk umumnya dinyatakan dengan

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{N} c_k z_k^n$$

dengan z_k, k=1, ..., N merupakan N akar dari persamaan karakteristik:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k = 0$$

Persamaan karakteristik ini dapat digunakan untuk menentukan **stabilitas** sistem. Jika akar-akar z_k memenuhi kondisi berikut:

$$|z_k| < 1, \quad k = 1, \cdots, N$$

Sistem dalam Pers. (1) stabil

CONTOH

Tentukan solusi homogen dr sistem yang dinyatakan dengan pers. Beda berikut:

$$y[n]-3y[n-1]-4y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$$

Dengan x[n] adalah sinyal unit step.

SOLUSI PARTIKULIR

solusi partikulir(khusus), $y_p[n]$, dibutuhkan untuk memenuhi pers beda untuk sinyal masukan khusus, $x[n]$, $n >= 0$.
Dengan kata lain, $y_p[n]$ adalah setiap solusi khusus yang memenuhi:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

untuk menyelesaikannya, diasumsikan $y_p[n]$ adalah suatu bentuk yang bergantung pada bentuk sinyal masukan $x[n]$.

Bentuk Umum Solusi partikulir

Sinyal masukan x[n]	Solusi khusus y[n]
A (konstanta)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n (K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \ldots + K_M)$
$A\cos(w_0 n)$	$K_1 \cos(w_0 n) + K_2 \sin(w_0 n)$
$A\sin(w_0 n)$	$K_1 \cos(w_0 n) + K_2 \sin(w_0 n)$

CONTOH

(1) Tentukan solusi partikulir dr sistem yang dinyatakan dengan pers. Beda berikut:

$$y[n] = {}^{5}\!/_{6}\, y[n-1] - {}^{1}\!/_{6}\, y[n-2] + x[n]$$

Dengan $x[n]=2^n u[n]$ adalah sinyal unit step.

(2) Tentukan solusi total dr sistem yang dinyatakan dengan pers. Beda berikut:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Dengan $x[n]=4^n u[n]$

Respon Impuls dalam Sistem Reekursif

Respon impuls, h[n], dari suatu sistem LTI yang dinyatakan dalam pers. beda (sistem reekursif) sama dengan respon keadaan nol sistem bila masukan **x[n]= d[n].**
Sedangkan solusi khususnya $y_p[n]=0$.

Contoh:
Tentukan respon impuls h[n] untuk sistem yang didefinisikan dengan persamaan beda orde ke-2

$$y[n]-3y[n-1]-4y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$$

FIR dan IIR

Sistem LTI berdasarkan respon impulsnya

Respon Impuls berhingga (FIR)

Respon Impuls tak berhingga (IIR)

$h[n] = 0$, $n<0$ dan $n>= M$

Soal-Soal Latihan

(1) Tentukan solusi total dan respon impuls dari persamaan beda berikut:

$$y[n] = {}^{5}\!/_{6}\, y[n-1] - {}^{1}\!/_{6}\, y[n-2] + x[n]$$

Bila $x[n]=2^n u[n]$

(2) Tentukan respon impuls dari sistem yang dideskripsikan persamaan beda berikut:

$a)\quad y[n] = 0.6\,y[n-1] - 0.08\,y[n-2] + x[n]$

$b)\quad y[n] = 0.7\,y[n-1] - 0.1\,y[n-2] + 2x[n] - x[n-2]$

Soal-Soal Latihan

(3) Tentukan solusi total dan respon impuls dari persamaan beda berikut:

$$y[n] - 16\, y[n-1] + 15\, y[n-2] = x[n]$$

Bila x[n]=5n-2