Transformasi-z dan Invers serta aplikasinya

Kegunaan Transformasi -z

- Mengurangi perhitungan dalam operasi konvolusi dua sinyal
- Solusi persamaan beda dapat ditemukan dengan perhitungan aljabar yang lebih mudah
- Fungsi transfer pada sistem LTI

DEFINISI

Transformasi-z, F(z), dari fungsi waktu diskrit f(n) adalah:

$$Z[f(n)] = F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} \qquad (1)$$

dengan z adalah variabel kompleks

Hubungan pada Pers. (1) → Transformasi-z bilateral.

Pers. (1) dapat ditulis:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} f(k) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Jika f(n)=0 untuk n<0, maka:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \qquad (2)$$

Hubungan pada Pers. (2) → Transformasi-z unilateral (satu sisi)

Region Of Convergence (ROC)

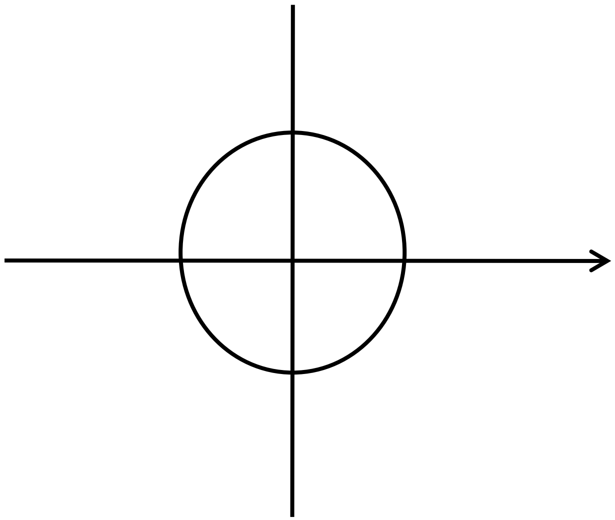
Karena Transformasi-z adalah deret pangkat tak hingga

↓

Transforamsi-z hanya berlaku untuk nilai-nilai z yang konvergen

↓

Himpunan seluruh nilai z, agar F(z) konvergen → ROC



Contoh dan Soal-soal Latihan

Tentukan Transformasi-Z dari sinyal berhingga waktu diskrit berikut serta ROC-nya:

$$x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$$

$$x_3(n) = \delta(n)$$

$$x_4(n) = \delta(n-k), \qquad k > 0$$

$$x_5(n) = \delta(n+k), \qquad k > 0$$

Tentukan juga transformasi-Z dari sinyal berikut:

a) $x(n)=u(n)$, sinyal step unit

b) $x(n)=a^n u(n)$, sinyal eksponensial untuk $n >= 0$

c) $x(n)=n$, sinyal ramp

d) $x(n)=e^{-2n}$

e) $x(n)=n\, e^{-2n}$

f) $x(n)=e^{2n}\cos(3n)$

JAWAB

$$x_1(n) = \{1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 0,\ 1\}$$

$$X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{5} x_1(k) z^{-k}$$

$$= x_1(0)z^{-0} + x_1(1)z^{-1} + x_1(2)z^{-2} + x_1(3)z^{-3} + x_1(4)z^{-4} + x_1(5)z^{-5}$$

$$= 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_3(n) = \delta(n)$$

$$X_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_3(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{0} x_3(k) z^{-k} = 1z^{0} = 1$$

$$x_4(n) = \delta(n-k), \qquad k > 0$$

$$X_4(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_4(k) z^{-k} = \sum_{k=k}^{k} x_4(k) z^{-k} = 1z^{-k} = z^{-k}$$

JAWAB

$$x(n) = u(n)$$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$$

$$= u(0)z^{-0} + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + u(3)z^{-3} + \cdots$$

$$= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Deret geometri
dengan a=1, r=z^{-1}
$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

$$= a^0 z^{-0} + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \cdots$$

$$= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

Deret geometri
dengan a=1, r=az^{-1}
$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

Tabel Transformasi-z

F(n)	F(z)	ROC
$\delta(n)$	1	All z
$\delta(n-k), k>0$	z^{-k}	$z \neq 0$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > a$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > a$

F(n)	F(z)	ROC
$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(bn)$	$\frac{z\sin(b)}{z^2 - 2z\cos b + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos(bn)$	$\frac{z(z - \cos b)}{z^2 - 2z\cos b + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n \sin(bn)$	$\frac{az\sin(b)}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$	$\lvert z\rvert > a$
$a^n \cos(bn)$	$\frac{z(z - a\cos b)}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$	$\lvert z\rvert > a$

Sifat-Sifat Trasformasi-z

1. Linearitas
2. Time Shifting (pergesearan waktu)
3. Convolusi
4. Teorema nilai awal

Sifat-Sifat Transformasi-z

1. Linieritas

jika

$$x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(z)$$

dan

$$x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(z)$$

maka

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z), \quad a_i \text{ konstan}$$

ROC-nya adalah irisan dari $x_1(n)$ dan $x_2(n)$

Contoh:

Tentukan transformasi-z dan ROC-nya

$$x(n) = (3(2^n) - 4(3^n))\,u(n)$$

Sifat-Sifat Transformasi-z

2. Time Shifting/Pergeseran waktu

jika

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(z)$$

maka

$$x(n-k) \xrightarrow{Z} z^{-k} X(z)$$

ROC sama

Contoh:

Tentukan transformasi-z dari x(n-2) dan x(n+2) dan ROC-nya dari contoh sebelumnya

$$x_1(n) = \{1, \ 2, \ 5, \ 7, \ 0, \ 1\} \qquad X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_2(n) = x(n-2) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\} \qquad X_2(z) = ...$$

Sifat-Sifat Transformasi-z

3. Convolusi

jika $x_1(n) \xrightarrow{Z} X_1(z)$ dan

$$x_2(n) \xrightarrow{Z} X_2(z)$$

maka

$$x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{Z} X_1(z).X_2(z)$$

ROC-nya adalah irisan dari $x_1(n)$ dan $x_2(n)$

Contoh:

Tentukan transformasi-z dari konvolusi pada contoh sebelumnya (pembahsan konvolusi)

Aplikasi Transformasi-z pada sistem LTI

Bentuk umum pers. Beda pada LTI

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M)$$

Dengan menerapkan transf.z dan sifat time shifting, dengan:

$$x(n) \xrightarrow{Z} X(z) \quad \text{dan} \quad x(n) \xrightarrow{Z} Y(z)$$

maka

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \cdots + b_M z^{-M} X(z)$$

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}) X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M})}{(a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N})})$$

Fungsi transfer, H(z)

Contoh

Tentukan fungsi transfer sistem LTI yang dinyatakan dalam pers. Beda berikut

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.1x(n), \quad \text{dengan } x(n) = u(n)$$

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1), \quad \text{dengan } x(n) = 4^n u(n)$$

Invers Transformasi-z

Invers transformasi-z didefinisikan sebagai:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c} x(z) z^{n-1} dz$$

dengan integralnya adalah integral kontur melalui lintasan tertutup c yang terdapat pada titik awal dan terletak dalam daerah konvergensi X(z)

Karena perhitungan integral kontur sulit dan kompleks, maka untuk mencari invers dari transformasi-z dapat dengan melihat tabel, atau digunakan metode lain:

Metode
Ekspansi pecahan parsial

Metode
Pembagian panjang

Penyelesaian Persamaan Beda dengan Transformasi Z

Langkah-langkah:

$$\mathrm{H(z)} = \frac{\mathrm{Y(z)}}{\mathrm{X(z)}} \longrightarrow \frac{\mathrm{Y(z)}}{z} = \mathrm{f(z)} \longrightarrow \frac{\mathrm{Y(z)}}{z} = \frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{z-a_n} \xrightarrow{\mathrm{z}^{-1}} \mathrm{y(n)} = \mathrm{x(n)}$$

$$\mathrm{Y(z)} = \mathrm{H(z)X(z)}$$

Lakukan ekspansi
Pecahan parsial

inverskan

Tentukan invers transformasi-z dari contoh sebelumnya

Pratikum
Transformasi-z dan Invers
serta aplikasinya

Transformasi-z

Matlab menyediakan function untuk mendapatkan transformasi-z dari suatu fungsi diskrit, yaitu menggunakan ztrans.

Lakukan langkah-langkah percobaan untuk mendapatkan transformasi-z dari suatu fungsi sebagai berikut.

```
>>syms n
>>f=4^n
>>F=ztrans(f)
```

Jika dirunning maka akan menghasilkan keluaran sebagai berikut:

```
F = 1/4*z/(1/4*z-1)
```

Untuk menyederhanakan ekspresi matematika diatas, gunakan function simplify

```
>> simplify(F)
```

Maka akan muncul keluaran sebagai berikut:

```
z/(z-4)
```

Perhatikan bahwa hasilnya sama persis waktu diperkuliahan.

Invers Transformasi-z

Invers transformasi-z dapat dicari menggunakan metode eksapansi pecahan parsial dan metode pembagian panjang.
Matlab memiliki fungsi untuk mencari invers transformasi-z menggunakan ekspansi pecahan parsial, yaitu: [R, P, K]=residue(B,A), dimana A dan B adalah konstanta dari fungsi z.
Misal dapatkan invers transformasi-z dari fungsi berikut:

$$F(z) = \frac{2z}{z^2 + 3z + 2}$$

Solusi:

$$F(z) = \frac{2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

Maka A=[1 3 2] dan B=[0 2]

Coding selengkapnya:

```
>> A=[1 3 2];
>> B=[0 2];
>> [R, P]=residue(B,A)
```

Maka akan didapatkan hasil sebagai berikut:

R =

-2

2

P =

-2

-1

F(z) diekspansikan ke dalam jumlahan dalam bentuk $r/(1-pz^{-1})$ dimana r adalah residu dan p adalah pole. Sehingga akan kita dapatkan:

$$F(z)=\frac{-2}{1+2z^{-1}}+\frac{2}{1+z^{-1}}=\frac{-2z}{z+2}+\frac{2z}{z-1}$$

Oleh karenanya, invernya adalah:

$f(k)=-2(-2)^n + 2(1)^n$

- Coba anda ulangi langkah-langkah program di atas untuk fungsi-fungsi yang diberikan Lakukan analisis kemudian simpulkan! Wajib menggunakan **GUIDE**