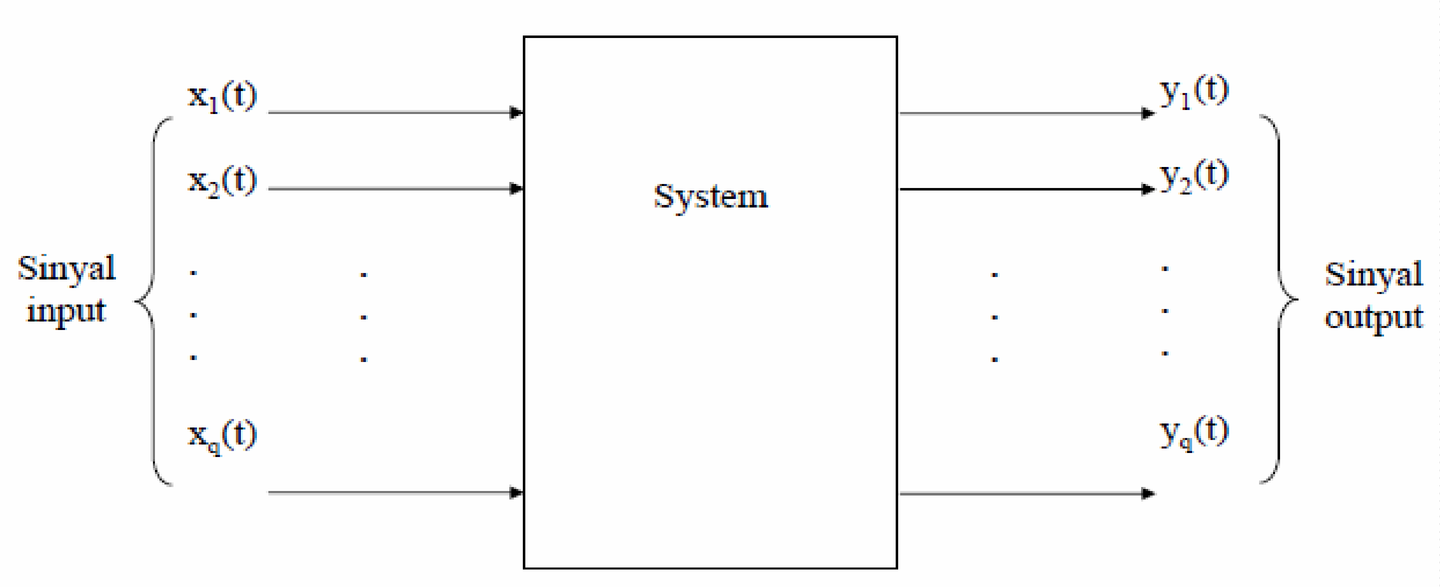
SISTEM WAKTU DISKRIT, KONVOLUSI, PERSAMAAN BEDA

Pengolahan Sinyal Digital

PENGANTAR

Definisi SISTEM

Proses yang menghasilkan sebuah sinyal keluaran dalam rangka merespon sebuah sinyal masukan



Gambaran dasar sistem

Beberapa Contoh Sistem

1. Sebuah sistem komunikasi dengan input berupa sinyal yang ditransmisi dan output berupa sinyal yang diterimanya.
2. Sebuah sistem biologi seperti alat pendengaran manusia (telinga) dengan input berupa sinyal suara yang masuk ke gendang telinga dan output berupa rangsangan syaraf yang selanjutnya diolah di otak untuk pengambilan keputusan informasi apa yang masuk.
3. Sebuah manipulator robot dengan input berupa torsi yang diaplikasikan ke robot dan output berupa posisi akhir salah satu lengannya.
4. Proses manufaktur, dimana input berupa bahan mentah yang dimasukkan dan outputnya berupa jumlah barang yang diproduksinya.

MODEL MATEMATIK SISTEM

Hubungan antar komponen (sinyal) dalam suatu sistem digambarkan dalam suatu bentuk persamaan - persamaan matematika

MODEL MATEMATIKA

representasi input & output state

Model matematik pada suatu sistem biasanya merupakan represeantasi **ideal** pada sistem.
Dengan kata lain, banyak sistem aktual (dalam ujud fisik yang sebenarnya) tidak dapat digambarkan dengan suatu model matematik.

Klasifikasi Sistem

1) Sistem Waktu Kontinu

Penggambaran sistem waktu kontinyu selalu berkaitan dengan bentuk representasi matematik yang mengambarkan sistem tersebut dalam keseluruhan waktu dan berkaitan dengan penggunaan notasi f(t).

2) Sitem Waktu Diskrit

Penggambaran sistem waktu disktrit berkaitan dengan pengambilan sampel pada waktu-waktu tertentu dari sistem yang biasanya dengan penggunaan notasi f[n].

SISTEM WAKTU DISKRIT

- **Sistem Waktu Diskrit** → Divais atau algoritma yang beroperasi pada sinyal waktu diskrit (masukan /eksitasi) untuk menghasilkan sinyal waktu diskrit lain (keluaran/respon sistem)

$$y[n] = T\big[x[n]\big] \quad \text{atau} \quad x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

T : Transformasi (operator), atau pemrosesan dilakukan dengan sistem pada x[n] untuk menghasilkan y[n]

SISTEM WAKTU DISKRIT

- **Contoh:**

  Tentukan respon dari sistem-sistem berikut terhadap sinyal :

$$x[n] = \begin{cases} |n|, & -3 \le n \le 3 \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

a) y[n]=x[n]

b) y[n]=x[n-1]

c) y[n]=x[n+1]

d) y[n]=1/3[x[n+1]+x[n]+x[n-1]]

e) y[n]=maks{x[n+1], x[n], x[n-1]}

Sifat-Sifat Sistem Waktu Diskrit

1. Sistem dengan dan tanpa memori
2. Kausalitas
3. Linearitas
4. Stabilitas
5. Invariansi Waktu

Sifat-Sifat Sistem Waktu Diskrit

1. Sistem Statis Vs Sistem Dinamis

Sistem Statis (tanpa memori)

jika keluarannya untuk setiap harga variabel bebas pada waktu yang diberikan bergantung hanya pada masukan waktu yang sama.

Contoh : $y[n]=(2x[n]-x^2[n])^2$

Sistem Dinamis (menggunakan memori)

jika sistem dapat menahan atau menyimpan informasi mengenai harga masukan yang bukan harga masukan saat ini

Contoh : $y[n]=\Sigma x[n-k]$;

$y[n]=x[n-1]$; delay

2. Sistem Linear Vs Sistem Nonlinear

Sistem Linear

jika memenuhi prinsip superposisi

respon sistem terhadap jumlah bobot sinyal masukan akan sama dengan jumlah bobot yang sesuai dengan dari respon sistem terhadap masing-masing sinyal masukan individual

Teorema. Sistem adalah linear jika dan hanya jika

$$T\left[a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\right] = a_1 T\left[x_1[n]\right] + a_2 T\left[x_2[n]\right]$$

untuk setiap masukan $x_1[n]$ dan $x_2[n]$ yang berubah-ubah dan setia kontanta a_1 dan a_2 yang berubah-ubah

Sistem Nonlinear

Jika sistem tidak memenuhi prinsip superposisi

2. Sistem Linear Vs Sistem Nonlinear

Contoh

Tentukan apakah sistem-sistem berikut ini linear atau non linear!

a) $y[n] = nx[n]$

b) $y[n]=x^2[n]$

c) $y[n]=x[n^2]$

d) $y[n]=Ax[n]+B$

3. Sistem Causal Vs Sistem Non-Cuasal

Sistem Causal (Sebab-Akibat)

Jika keluaran sistem untuk setiap waktu n (yaitu, y[n]) hanya bergantung pada masukan sekarang dan sebelumnya (yaitu, x[n], x[n-1], ...), tetapi tdk bergantung pada masukan yang akan datang (yaitu, x[n+1], x[n+2], dst).

Dalam matematis:

$$y[n] = T\left[x[n], x[n-1], x[n-2], \cdots\right]$$

Sistem Non-Causal

Jika sistem tidak memenuhi definisi di atas (sistem causal)

3. Sistem Causal Vs Sistem Non-Cuasal

Contoh

Tentukan apakah sistem-sistem berikut ini causal atau non causal!

a) $y[n] = x[n]-x[n-1]$

b) $y[n]=x[n^2]$

c) $y[n]=ax[n]$

d) $y[n]=x[-n]$

e) $y[n]=x[n]+3x[n+4]$

f) $y[n]=x[an]$

g) $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

4. Sistem Invarian Waktu Vs. Sistem Varian Waktu

Sistem Invarian Waktu (Time Invarian)

Jika karakteristik sinyal masukan-keluaran tidak berubah terhadap waktu

Teorema. Sistem adalah invarian waktu jika dan hanya jika

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

yang memberikan bahwa

$$x[n-k] \xrightarrow{T} y[n-k]$$

Untuk setiap sinyal masukan x[n] dan setiap pergeseran waktu k

Sistem Time Varian

Jika sistem tidak memenuhi definisi di atas (sistem time invarian)

4. Sistem Invarian Waktu Vs. Sistem Varian Waktu

Contoh

Tentukan apakah sistem-sistem berikut ini invarian waktu atau varian waktu!

a) $y[n] = x[n]-x[n-1]$

b) $y[n]=x[n^2]$

c) $y[n] = nx[n]$

Sifat-Sifat Sistem Waktu Diskrit

4. Sistem Invarian Waktu Vs. Sistem Varian Waktu

Untuk memahami sistem invarian atau varian waktu, perhatikan sistem diatas dan lakukan langkah2 berikut:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & untuk \quad 0 \leq n < 3 \\ 0 & untuk \quad lainnya \end{cases}$$

a) Buat sketsa x[n]

b) Tentukan dan buat sketsa y[n]=T[x[n]]

c) Buat sketsa sinyal $y'_2[n]=y[n-2]$

d) Tentukan dan buat sketsa $x_2[n]=x[n-2]$

e) Tentukan dan buat sketsa $y_2[n]=T[x_2[n]]$

f) Bandingkan sinyal $y'_2[n]$ dengan $y_2[n]$. Apa kesimpulan Anda?

Soal-Soal Latihan

Dari serangkaian sistem yang memiliki hubungan input/output berikut ini coba anda periksa apakah kausal atau non kausal, dengan memori atau tanpa memori, linear atau non linear, dan time variant atau time invariant.

a) x[-n]

b) X[2n]

c) X[n]u[n]

d) X[n]+nx[n+1}

Soal-Soal Latihan

Sebuah sistem penyimmpanan uang di bank memiliki model matematik seperti berikut:

$$y[n+1] - (1+I/4)y[n] = x[n+1]$$

Dimana:

y[n] adalah jumlah yang ada setelah penghitungan pada quarter ke-n,

x[n] adalah jumlah yang didepositkan dalam quarter ke-n,

I adalah interest rate tahunan dalam bentuk desimal.

Untuk I = 10%, hitung y[n] untuk n = 1,2,3,… ketika y[0] =1000

dan x[n] =1000 untuk n >1.

Teknik-Teknik Analisis Sistem Linear (LTI System)

Terdapat 2 metode dasar untuk menganalisis sikap atau respon sistem linear terhadap sinyal masukan tertentu :

Konvolusi Sinyal

solusi langsung dari persamaan masukan-keluaran untuk sistem

$\Downarrow$

Persamaan beda (diffrence eq.)

KONVOLUSI

- Rumus konvolusi muncul dari adanya sifat linieritas dan invarian waktu pada sistem. Sebagai konsekwensinya, respon sistem terhadap setiap sinyal masukan yang berubah-ubah dapat dinyatakan dari segi respon **cuplikan unit** sistem

- Misal dipunyai sinyal x[n] yang berubah-ubah , maka x[n] dapat didekomposisi menjadi jumlahan bobot(skala) deret cuplikan unit yang digeser (**impuls**)

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- **Contoh.** Perhatikan kasus barisan berhingga sbb:

$$x[n] = \{2, \underset{\uparrow}{4}, 0, 3\}$$

Pisahkan x[n] menjadi jumlah bobot deret impuls!

RUMUSAN KONVOLUSI

Misal , jika sinyal masukan x[n] dinyatakan sebagai jumlahan bobot impuls , yakni:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Maka, respon sistem terhadap x[n] adalah jumlah bobot keluaran yang tepat, yakni

$$y[n] = T\left[x[n]\right] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]T\left[\delta[n-k]\right]$$

Jika respon sistem LTI terhadap deret cuplikan unit, $\delta[n]$, dinotasikan dengan h[n], yakni: $h[n] = T\left[\delta[n]\right]$, maka dengan sifat invarian waktu, respon sistem terhadap tunda deret cuplikan unit (**respon impuls**), $\delta[n-k]$, adalah

$$h[n-k] = T\left[\delta[n-k]\right]$$

Sehingga, persamaan diatas dapat ditulis sbb:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Rumus konvolusi

Masukan x[n] berkonvolusi dgn h[n] untuk menghasilkan keluaran y[n]

KONVOLUSI

Jadi

- ✓ Konvolusi menggabungkan tiga buah sinyal → sinyal masukan, sinyal keluaran, dan respon impuls
- ✓ Konvolusi adalah cara matematik untuk mengkombinasikan dua buah sinyal menjadi sinyal dalam bentuk lain.
- ✓ Notasi Konvolusi

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Konvolusi bersifat komutatif

$$y[n] = h[n] * y[n]$$

KONVOLUSI

Langkah-langkah Konvolusi y(n)=x[n]*h[n]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

a) **Pencerminan(folding).** Cerminkan h[k] pada k=0 untuk memperoleh h[-k]
b) **Pergeseran (Shifting).** Geser h[-k] dengan n_0 ke kanan (kiri) jika n_0 positif (negatif) untuk memperoleh $h[n_0-k]$
c) **Perkalian (multiplication).** Kalikan x[k] dengan $h[n_0-k]$ untuk memperoleh produk $v_{n0}[k]=x[k]h[n_0-k]$
d) **Penjumlahan(summation).** Jumlahkan seluruh nilai deret produk $v_{n0}[k]$ untuk memperoleh nilai pada waktu $n=n_0$

CONTOH KONVOLUSI

Respon impuls dari suatu sistem LTI adalah

$$h[n] = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$$

Tentukan respon sistem terhadap sinyal masukan

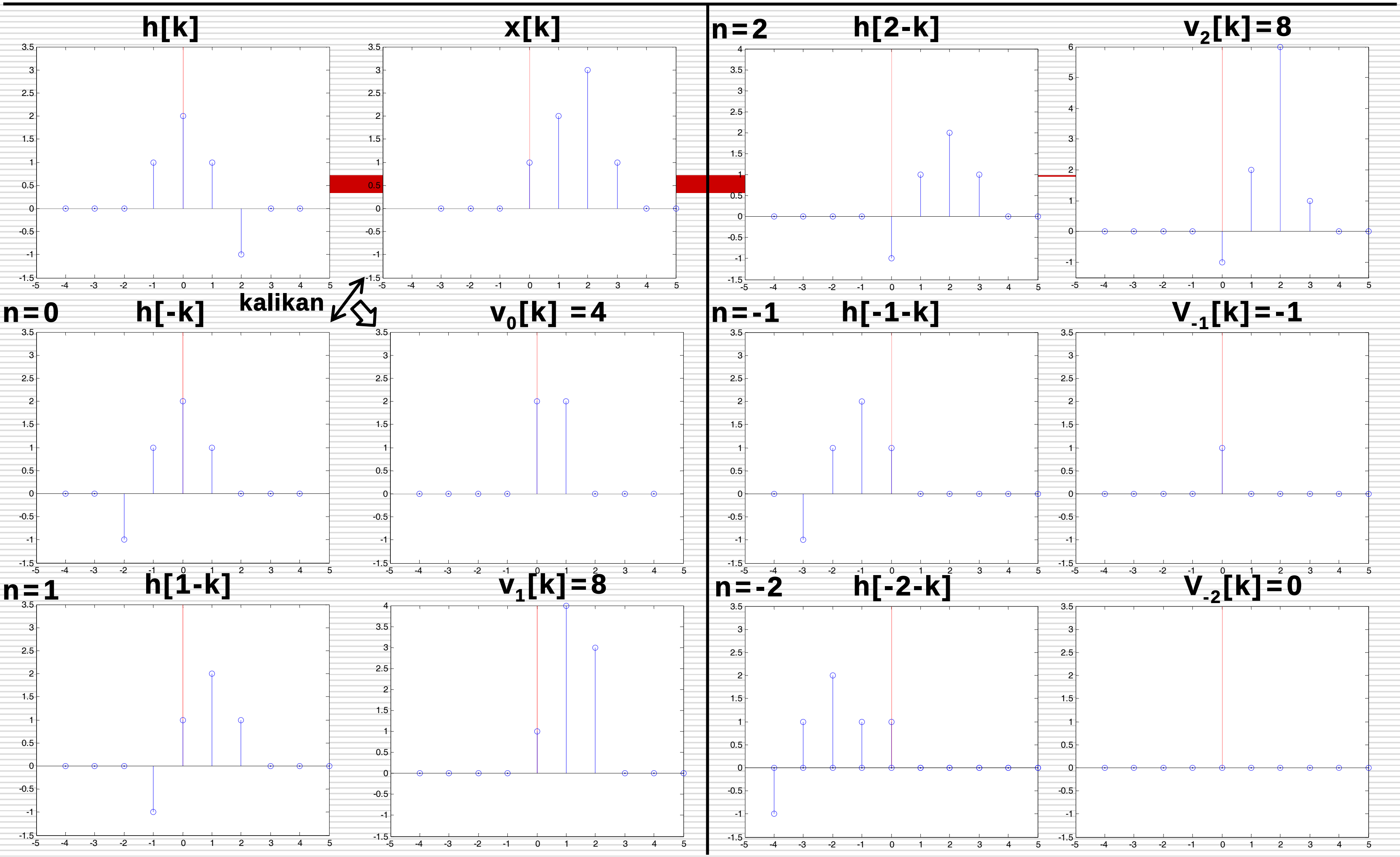
$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$$

Penyelesaian:

Untuk menjawab permasalahan diatas dapat dilakukan
Dengan 2 cara → secara grafik dan secara analitik

Proses KONVOLUSI

$h[n] = \{1, 2, 1, -1\}$ $x[n] = \{1, 2, 3, 1\}$



$x[k]*h[k] = \{\ldots, 0, 0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, 0, \ldots\}$

Proses KONVOLUSI

x[n]={1, 2, 3,1}   h[n]={1, 2, 1,-1}

Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 , 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={1, 2 , 1, -1}

Pembalikan sinyal kedua
Sinyal pertama : {1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={-1 , 1, 2, 1}

Pergeseran n=0 & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 , 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={-1 , 1, 2, 1}

Product & sum : {0, 0, 2, 2, 0, 0}=4

Pergeseran n=-1 & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 , 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={-1 , 1, 2, 1}

Product & sum : { 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}=1

Pergesearan n=-2 & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]= {1, 2 ,3, 1}
Sinyal kedua : h[n]={ -1, 1, 2, 1}

Product & sum : {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0} = 0

Pergesearan n=1 & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]= {1, 2, 3,1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1,1, 2, 1}

Product & sum : {0, 1, 4, 3, 0} = 8

Pergesearan empat step & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]= { 1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1,1, 2, 1}

Product & sum : {-1, 2, 6, 1} = 8

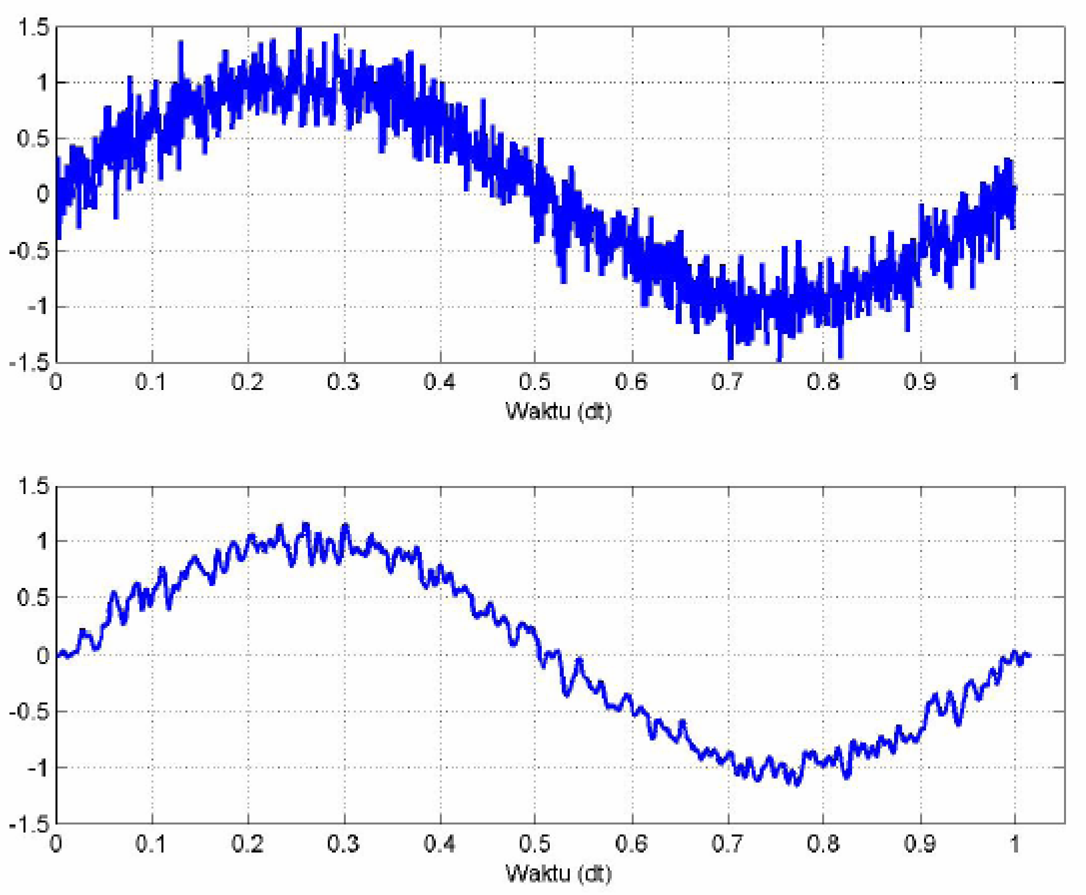
Pergesearan lima step & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]={1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1 ,1, 2, 1}
Product & sum : {0,-2, 3, 2, 0} = 3

Pergesearan enam step & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]={1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1 ,1, 2, 1}
Product & sum : {0, 0,-3, 1, 0, 0} =-2

Pergesearan tujuh step & penjumlahan
Sinyal pertama : x[n]={1, 2, 3, 1}
Sinyal kedua : h[n]= {-1 ,1, 2, 1}
Product & sum : {0, 0, 0,-1, 0, 0, 0} = -1

x[k]*h[k]={0, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1}

Proses pemfilteran dengan KONVOLUSI pada sinyal bernoise



konvolusi
dapat digunakan
pada proses
pemfilteran

SOAL LATIHAN

1. Diketahui fungsi sinyal sebagai berikut :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & untuk \quad 0 \le n < 3 \\ 2 & untuk \quad n = 3 \\ 0 & untuk \quad n > 3 \end{cases}$$

   Jika respon impuls, h[n]={1,1,2}, maka tentukan keluaran y[n] !

2. Dari soal no. 1, bila h[n]={0,0,2,1,0}, maka tentukan y[n]!

3. Tentukan respon sistem yang memiliki respon impuls

$$\mathrm{h[n]} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \mathrm{u(n)}$$

   terhadap sinyal masukan

$$\mathrm{x[n]} = 2^{n}\, \mathrm{u(n)}$$

Persamaan Beda

Sebuah sistem LTI bisa dinyatakan melalui persamaan beda:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (1)$$

Jika $a_N \neq 0$, maka persamaan beda berorde-N

Pers. (1) dapat ditulis sbb:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \qquad (2)$$

Penyelesaian persamaan beda ini dalam bentuk:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

Bagian homogen

Bagian partikulir

SOLUSI HOMOGEN
(respon masukan nol)

Solusi homogen diperoleh dengan meng-nol-kan bagian kiri dari pers. (1). Bentuk umumnya dinyatakan dengan

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{N} c_k z_k^n$$

dengan z_k, k=1, …, N merupakan N akar dari persamaan karakteristik:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k = 0$$

Persamaan karakteristik ini dapat digunakan untuk menentukan **stabilitas** sistem. Jika akar-akar z_k memenuhi kondisi berikut:

$$|z_k| < 1, \quad k = 1, \cdots, N$$

Sistem dalam Pers. (1) stabil

CONTOH

Tentukan solusi homogen dr sistem yang dinyatakan dengan pers. Beda berikut:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Dengan x[n] adalah sinyal unit step.

SOLUSI PARTIKULIR

solusi partikulir(khusus), $y_p[n]$, dibutuhkan untuk memenuhi pers beda untuk sinyal masukan khusus, x[n], n>= 0.

Dengan kata lain, $y_p[n]$ adalah setiap solusi khusus yang memenuhi:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

untuk menyelesaikannya, diasumsikan $y_p[n]$ adalah suatu bentuk yang bergantung pada bentuk sinyal masukan x[n].

Bentuk Umum Solusi partikulir

Sinyal masukan x[n]	Solusi khusus y[n]
A (konstanta)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \dots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n (K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \dots + K_M)$
$A\cos(w_0 n)$	$K_1\cos(w_0 n) + K_2\sin(w_0 n)$
$A\sin(w_0 n)$	$K_1\cos(w_0 n) + K_2\sin(w_0 n)$

CONTOH

(1) Tentukan solusi partikulir dr sistem yang dinyatakan dengan pers. Beda berikut:

$$y[n] = \tfrac{5}{6}\, y[n-1] - \tfrac{1}{6}\, y[n-2] + x[n]$$

Dengan $x[n]=2^n u[n]$ adalah sinyal unit step.

(2) Tentukan solusi total dr sistem yang dinyatakan dengan pers. Beda berikut:

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

Dengan $x[n]=4^n u[n]$

Respon Impuls dalam Sistem Reekursif

Respon impuls, h[n], dari suatu sistem LTI yang dinyatakan dalam pers. beda (sistem reekursif) sama dengan respon keadaan nol sistem bila masukan **x[n]= d[n].**
Sedangkan solusi khususnya $y_p[n]=0$.

Contoh:
Tentukan respon impuls h[n] untuk sistem yang didefinisikan dengan persamaan beda orde ke-2

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1]$$

FIR dan IIR

Sistem LTI berdasarkan respon impulsnya

Respon Impuls berhingga (FIR)

Respon Impuls tak berhingga (IIR)

h[n] = 0, n<0 dan n>= M

Soal-Soal Latihan

(1) Tentukan solusi total dan respon impuls dari persamaan beda berikut:

$$y[n] = {}^{5}\!/_{6}\, y[n-1] - {}^{1}\!/_{6}\, y[n-2] + x[n]$$

Bila $x[n]=2^n u[n]$

(2) Tentukan respon impuls dari sistem yang dideskripsikan persamaan beda berikut:

$$a) \quad y[n] = 0.6\, y[n-1] - 0.08\, y[n-2] + x[n]$$
$$b) \quad y[n] = 0.7\, y[n-1] - 0.1\, y[n-2] + 2x[n] - x[n-2]$$

Soal-Soal Latihan

(3) Tentukan solusi total dan respon impuls dari persamaan beda berikut:

$$y[n] - 16\, y[n-1] + 15\, y[n-2] = x[n]$$

Bila x[n]=5n-2