Matematika 3

Deret Fourier

Untuk sinyal waktu periodik

Deret Fourier terdiri dari Deret Fourier Trigonometris dan Deret Fourier Eksponensial

Fungsi periodik

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan mempunyai periode T atau periodik dengan periode T jika untuk setiap x berlaku $f(x + T) = f(x)$, di mana T konstanta positif. Nilai positif terkecil T dinamakan periode terkecil atau disingkat periode $f(x)$.

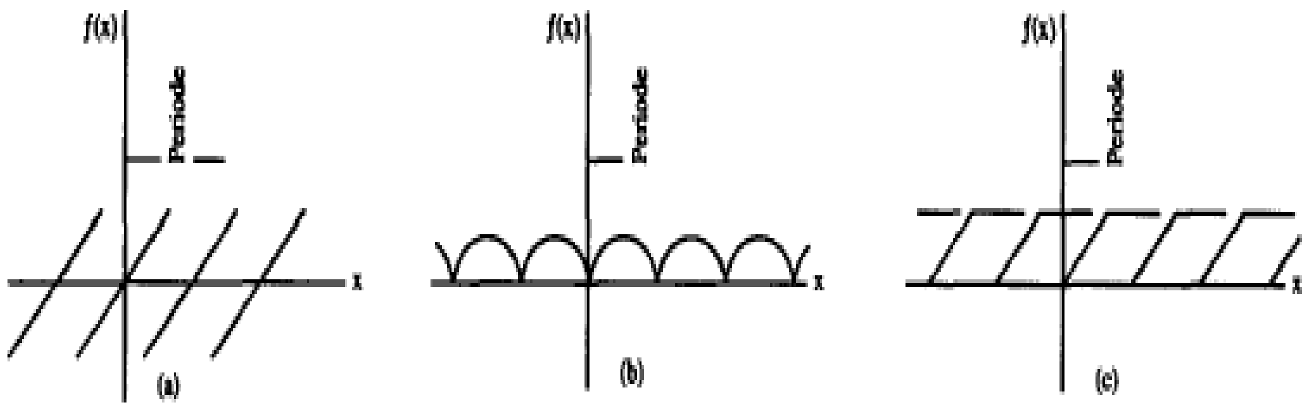
Contoh 1. Fungsi sin x mempunyai periode 2π, 4π, 6π, . . .karena $\sin(x + 2\pi)$, $\sin(x + 4\pi)$, $\sin(x + 6\pi)$, . . . sama dengan sin x. Tetapi 2π adalah periode terkecil atau periode sin x.

Contoh 2. Periode fungsi sin nx atau cos nx, di mana n bilangan bulat positif, adalah $2\pi/n$.

Contoh 3. Periode tan x adalah π.

Contoh 4. Suatu konstanta mempunyai periode suatu bilangan positif.

contoh



Latihan soal

Gambarkanlah setiap fungsi berikut.

(a) $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases}$ Periode = 10

(b) $f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Periode = 2π

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x < 6 \end{cases}$ Periode = 6

Deret Fourier Trigonometris

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

T = periode

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

Deret Fourier Trigonometris

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

atau

Misalkan $f(x)$ didefinisikan pada selang $(-L, L)$ dan di luar selang ini oleh $f(x + 2L) = f(x)$, yaitu diandaikan bahwa $f(x)$ mempunyai periode 2L. Deret Fourier atau uraian Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ ditentukan oleh

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$

di sini koefisien Fourier a_n dan b_n adalah

$$\left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-1}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \end{aligned} \right. \qquad n = 0, 1, 2, . \qquad (2)$$

lanjutan

Jika $f(x)$ mempunyai periode 2L, maka koefisien a_n dan b_n dapat ditentukan ekivalen (setara) dengan bentuk

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_c^{c+2L} f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{L}\, dx \\ b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_c^{c+2L} f(x) \sin \dfrac{n\pi x}{L}\, dx \end{cases} \qquad (3)$$

di sini c suatu bilangan riil. Dalam kasus khusus, $c = -L$, (3) menjadi (2).

Untuk menentukan a_0 pada (1), kita gunakan (2) atau (3) dengan $n = 0$.

Deret Fourier Eksponensial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{j n \omega_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, e^{-j n \omega_0 t} \, dt$$

Transformasi Fourier

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Transformasi Laplace

F(s) = L [f(t)] = transformasi Laplace dari f(t)

f(t) = L^{-1} [F(s)] = Inverse transformasi Laplace dari F(s)

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$