Deret fourier

Pertemuan ke-2

Oleh : Ira Prasetyaningrum

SYARAT DIRICHLET

(1) $f(x)$ terdefinisi dan bernilai tunggal kecuali mungkin di sejumlah berhingga titik pada $(-L, L)$.

(2) $f(x)$ periodik di luar $(-L, L)$ dengan periode $2L$.

(3) $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu bagian demi bagian pada $(-L, L)$.

Maka deret (1) dengan koefisien (2) atau (3) konvergen ke :

(a) $f(x)$, bilamana x adalah suatu titik kekontinuannya.

(b) $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ bilamana x adalah suatu titik ketakkontinuannya.-

SYARAT DIRICHLET

Pada teorema ini, $f(x + 0)$ dan $f(x - 0)$ berturut-turut adalah limit kiri dan limit kanan dari $f(x)$ di x dan menyatakan $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x + \varepsilon)$ dan $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x - \varepsilon)$ di sini $\varepsilon > 0$. Ini sering kali dituliskan $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} f(x + \varepsilon)$ dan $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(x - \varepsilon)$ untuk menyatakan bahwa $\varepsilon \to 0$ dari arah nilai-nilai positif. Buktinya dapat dilihat pada Soal 10-18 dan 10-23.

Syarat (1), (2) dan (3) yang dinyatakan pada $f(x)$ adalah syarat cukup tetapi bukan syarat perlu, dan secara umum dalam prakteknya dipenuhi. Sekarang ini tidak diketahui syarat perlu dan cukup untuk kekonvergenan deret Fourier. Hal yang menarik adalah bahwa kekontinuan $f(x)$ tidak sendirian menjamin kekonvergenan suatu deret Fourier.

SYARAT DIRICHLET

Maka deret Fourier konvergen ke :

1. f(x) di x dimana f(x) continu
2. $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ untuk x dimana f(x) tidak kontinu.

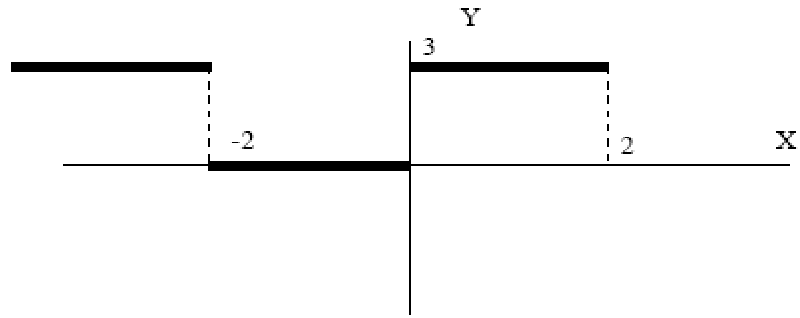
Soal 1

Perderetkan $f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 2 \end{cases}$ menurut deret Fourier:

Soal 1

(periode 4, L = 2)

Penyelesian :



$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0 \ dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3 \ dx = \frac{1}{2} 3x \ \Big|_0^2 = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0 \cos\frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3 \cos\frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= 1/2 \left[\frac{3.2}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots (\sin n\pi = 0)$$

Soal 1

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 0 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 3 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= 1/2\left[-\frac{3.2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{n\pi}(1-\cos n\pi), \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$b_n = 0$ untuk n genap

$$jadi: f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{2} + \ldots\right)$$

f (x) dapat ditulis sebagai berikut:

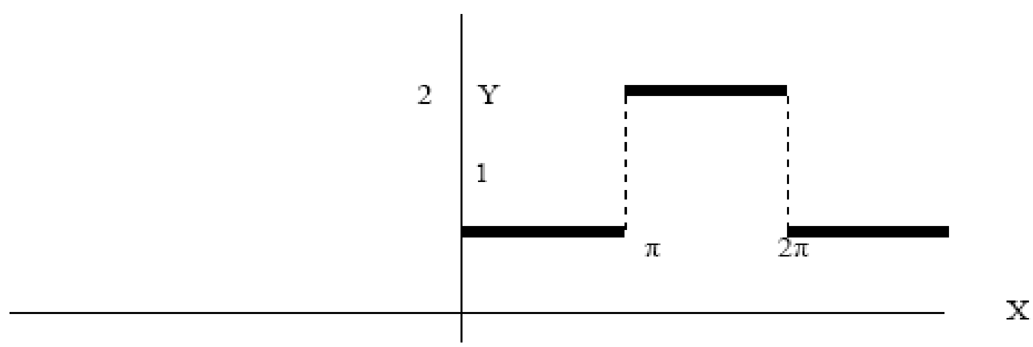
$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

Soal 2

Perderetan f(x) $= \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ menurut deret Fourier.

(periode 2π, $L = \pi$)

Penyelesaian:



Soal 2

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2dx = \frac{1}{\pi}\left\{ x\Big]_0^{\pi} + 2x\Big]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\{(\pi) + (4\pi - 2\pi)\} = 1 + 2 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2.\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos nx dx$$

$$= \left[\frac{1}{n\pi}\sin nx\right]_0^{\pi} + \left[\frac{2}{n\pi}\sin nx\right]_2^{2\pi} = 0$$

Soal 2

$$\mathrm{b_n} \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 2.\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\sin \mathrm{nx}\ \mathrm{dx} + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\ 2.\sin \mathrm{nx}\ \mathrm{dx}$$

$$= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos nx\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2}{n\pi}\cos nx\right]_{\pi}^{2\pi}$$

Soal 2

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \quad ; \quad (\cos 0 = \cos 2\pi)$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1), \qquad n = 1, 2, \; \ldots\ldots, \; b_n = 0 \text{ untuk n gebap}$$

$$b_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}$$