

Matematika 3

Deret Fourier

By Ira Prasetyaningrum

DERET FOURIER SINUS ATAU KOSINUS SEPARUH JANGKAUAN (HALF RANGE)

Suatu deret Fourier sinus atau cosinus separuh jangkauan berturut-turut adalah suatu deret di mana yang disajikan hanya suku-suku sinus atau hanya suku-suku kosinus, maka fungsi tersebut didefinisikan pada selang $(0, L)$ [separuh selang $(-L, L)$, yang merupakan penjelasan untuk istilah separuh jangkauan] dan kemudian fungsi tersebut dikelompokkan sebagai ganjil atau genap, agar ia dapat didefinisikan pada separuh selang lainnya, namakanlah $(-L, 0)$. Dalam kasus ini, diketahui :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \text{ untuk separuh jangkauan deret sinus}$$

DERET FOURIER SINUS ATAU KOSINUS SEPARUH JANGKAUAN (HALF RANGE)

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \text{ untuk separuh jangkauan deret cosinus}$$

IDENTITAS PARSEVAL

Identitas ini menyatakan bahwa

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

jika a_n dan b_n adalah koefisien Fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ dan jika $f(x)$ memenuhi syarat Dirichlet.

PENDIFFERENSIALAN DAN PENGINTEGRALAN DERET FOURIER

Pendifferensialan dan pengintegralan deret Fourier dapat dikerjakan dengan menggunakan teorema tentang deret yang berlaku secara umum untuk setiap deret. Harus diperhatikan bahwa teorema itu memberikan syarat cukup dan bukan syarat perlu. Teorema berikut ini untuk pengintegralan sering digunakan.

Teorema 10-2. Deret Fourier untuk $f(x)$ dapat diintegralan suku demi suku dari a ke x dan deret yang dihasilkan akan konvergen seragam ke $\int_a^x f(u) du$ asalkan $f(x)$ kontinu bagian demi bagian pada $-L < x < L$ dan a, x keduanya terletak pada selang ini.

PENDIFFERENSIALAN DAN PENGINTEGRALAN DERET FOURIER

NOTASI KOMPLEKS UNTUK DERET FOURIER

Dengan menggunakan kesamaan Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad \dots\dots\dots(10-6)$$

di sini $i = \sqrt{-1}$ deret Fourier untuk $f(x)$ dapat ditulis sebagai

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad \dots\dots\dots(10-7)$$

di mana $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad \dots\dots\dots(10-8)$

Dalam menuliskan kesamaan (7), kita mengandaikan bahwa syarat Dirichlet berlaku dan selanjutnya $f(x)$ kontinu pada x . Jika $f(x)$ tak kontinu di x , ruas kiri (7) diganti

dengan $\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}$

Soal 1

Uraikanlah $f(x) = x$, $0 < x < 2$ dalam separuh jangkauan (a) deret sinus, (b) deret cosinus,

periode 4

Soal 2

Tuliskan kesamaan Parseval yang bersesuaian dengan deret Fourier

$$f(x) = x, 0 < x < 2$$