Himpunan

by Ira Prasetyaningrum

Set / Himpunan

- *Set/Himpunan* = kumpulan dari objek-objek yang berbeda
- Anggota Himpunan disebut elemen/anggota
- Contoh
  - Listing:
    - Example: $A = \{1,3,5,7\} = \{7, 5, 3, 1, 3\}$
  - Description
    - Example: $B = \{x \mid x = 2k + 1, 0 \le k \le 30\}$

Himpunan

- Sebuah himpunan dapat dinyatakan dengan :
  - Enumerasi : Mendaftar semua elemen himpunan contoh

    A = {1,2,3,4} B = {a,b,c}
  - Menggunakan notasi pembentuk himpunan (notasi set builder)
    - Contoh : O = {x | x adalah bilangan ganjil positif yang kurang dari 10}
    - R ={x|x adalah bilangan real}.
  - Secara grafik dengan menggunakan Diagram Venn

Contoh Himpunan

- Himpunan V yang anggota-anggotanya merupakan huruf hidup dari alphabet V = {a,e,I,o,u}
- Himpunan B adalah himpunan positif integer kurang dari 100 maka B = {1,2,3,4…,99}.
- Himpunan alphabet ditulis dengan {a,b,c,d,e, ...,x,y,z}

Finite and infinite sets
Himpunan berhingga dan tak berhingga

- *Himpunan berhingga*
  - Contoh :
    - ❑A = {1, 2, 3, 4}
    - ❑B = {x | x is an integer, 1 $\leq$ x $\leq$ 4}

❑*Himpunan tak berhingga*

- ❑Contoh :
  - ❑Z = {integers} = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}
  - ❑S={x| x is a real number and 1 $\leq$ x $\leq$ 4} = [1,4]

Himpunan

- Himpunan kosong $\varnothing = \{\ \}$ tidak memiliki elemen disebut juga null set atau *void set.*

- *Universal* set (Himpunan semesta): himpunan dari semua elemen
- Contoh:
  - U = {semua bil asli}
  - U = {semua bil real}
  - U = $\{x \mid x$ adalah bil asli and $1 \leq x \leq 10\}$

Anggota Himpunan

- $x \in A$ untuk menyatakan x merupakan anggota himpunan A
- $x \notin A$ untuk menyatakan x bukan merupakan anggota himpunan A
- Contoh :
  - Misalkan A = {1,2,3} R = {a,b,{a,b,c},{a,c}} maka
  - $2 \in A$, $5 \notin B$, $\{a,b,c\} \in R$, $\{a\} \notin R$

Dua Himpunan yang Sama

- Dua Himpunan adalah sama jika dan hanya jika kedua himpunan memiliki elemen yang sama. Notasi $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$
- Contoh :
  - $A = \{1,3,5\}$ $B = \{3,5,1\}$ $C = \{1,3,3,3,1,5\}$
  - $A = B$ karena $1 \in A$ dan $1 \in B$, $2 \in A$ dan $2 \in B$, $3 \in A$ dan $3 \in B$
  - $A = C$ karena $1 \in A$ dan $1 \in C$, $2 \in A$ dan $2 \in C$, $3 \in A$ dan $3 \in C$
  - Berarti $A = C$

Cardinality/Kardinalitas

- Cardinality dari himpunan A (simbol |A|) adalah jumlah elemen dari Himp A
- Contoh:

  If $A = \{1, 2, 3\}$ then $|A| = 3$

  If $B = \{x \mid x$ is a natural number and $1 \leq x \leq 9\}$

  then $|B| = 9$

- cardinality
  - Dpt dihitung / Countable (e.g., natural numbers, integers)
  - Tidak dpt dihitung / Uncountable (e.g., real numbers)

Subsets/Himpunan Bagian

- X adalah subset Y jika tiap elemen X juga berada di Y ($X \subseteq Y$)

❑ *Equality*: X = Y jika $X \subseteq Y$ dan $Y \subseteq X$,

X = Y kapanpun $x \in X$, maka $x \in Y$

- X adalah *proper subset* dari Y jika $X \subseteq Y$ tapi tidak $Y \not\subseteq X$
  - Observation: $\emptyset$ is a subset of every set

Contoh Soal

- $A = \{1,2\}$ $B = \{1,2,5,6\}$

  $A \subseteq B$
- $X = \{1,2,3\}$ $Y = \{1,2,3\}$

  $X = Y$
- A adalah *proper subset* B
- X bukan *proper subset* Y

Power set

- The *power set* dari X adalah himpunan dari semua subset X dg simbol *P*(X)
  - Example: if X = {1, 2, 3},

    then *P*(X) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

❑ Jika |X| = n, maka |*P*(X)| = 2^n.

Set operations: Union and Intersection

Diberikan dua himp X dan Y

- The *union (gabungan)* dari X dan Y didefinisikan sebagai himpunan

$$X \cup Y = \{ x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$$

- The *intersection (irisan)* dari X dan Y didefinisikan sebagai himpunan

$$X \cap Y = \{ x \mid x \in X \text{ and } x \in Y\}$$

Dua himpunan X dan Y adalah *disjoint (saling lepas) jika* $X \cap Y = \emptyset$

Set operations: Union and Intersection

Diberikan dua himp X dan Y

- The *union (gabungan)* dari X dan Y didefinisikan sebagai himpunan

$$X \cup Y = \{ x \mid x \in X \text{ or } x \in Y\}$$

- The *intersection (irisan)* dari X dan Y didefinisikan sebagai himpunan

$$X \cap Y = \{ x \mid x \in X \text{ and } x \in Y\}$$

Dua himpunan X dan Y adalah *disjoint (saling lepas) jika* $X \cap Y = \emptyset$

Complement and Difference

- The *difference* dari dua himpunan

  $$X - Y = \{ x \mid x \in X \text{ and } x \notin Y\}$$

  The difference disebut juga *relative complement Y terhadap X*
- *Symmetric difference* (Beda Setangkup)

  $$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

- The *complement* dari Himpunan A berada dilingkup Himpunan Universal (Universal set U) adalah $A^c = U - A$

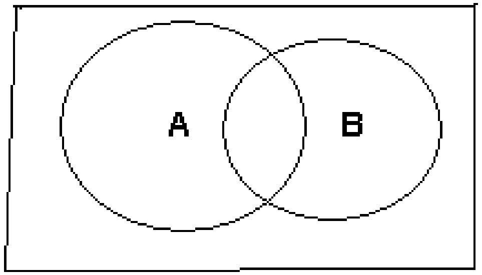
Contoh

- If $X=\{1, 4, 7, 10\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $X \cup Y =$
  - $X \cap Y =$
  - $X - Y =$
  - $Y - X =$
  - $X \Delta Y =$

Contoh

- If $X=\{1, 4, 7, 10\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$
  - $X \cap Y = \{1, 4\}$
  - $X - Y = \{7, 10\}$
  - $Y - X = \{2, 3, 5\}$
  - $X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = \{2, 3, 5, 7, 10\}$

Diagram Venn



- Diagram Venn merupakan gambaran grafik dari Himpunan
- union, intersection, difference, symmetric difference and complement dapat digambar dg diagram venn-nya
- Untuk menghitung jumlah elemen dari himpunan A dan B adalah

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Properties of set operations (1)

Theorema U adalah universal set, dan A, B dan C adalah subset U. Maka berlaku sifat berikut :

a) Associativity: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

b) Commutativity: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Properties of set operations (2)

c) Distributive laws:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d) Identity laws:

$$A \cap U = A \qquad A \cup \varnothing = A$$

e) Complement laws:

$$A \cup A^c = U \qquad A \cap A^c = \varnothing$$

Properties of set operations (3)

f) Idempotent laws:

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

g) Bound laws:

$$A \cup U = U \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

h) Absorption laws:

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

Properties of set operations(4)

i) Involution law: $(A^c)^c = A$

j) 0/1 laws: $\varnothing^c = U$ $\quad U^c = \varnothing$

k) De Morgan's laws for sets:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Ada berapa anggota dalam gabungan dua himpunan hingga?

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Contoh 1

Ada berapa bilangan bulat positif lebih kecil atau sama dengan 100 yang habis dibagi 6 atau 9?

Solusi.

Misalkan A: himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 6

B: himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 9.

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 6 atau 9 adalah

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \lfloor 100/6 \rfloor + \lfloor 100/9 \rfloor - \lfloor 100/18 \rfloor \\ &= 16 + 11 - 5 = 22 \end{aligned}$$

Contoh 2

Misalkan ada 1467 mahasiswa angkatan 2004 di ITB. 97 orang di antaranya adalah mahasiswa Departemen Informatika, 68 mahasiswa Departemen Matematika, dan 12 orang mahasiswa *double degree* Informatika dan Matematika. Ada berapa orang yang tidak kuliah di Departemen Matematika atau Informatika?

Solusi.

Misalkan A: himpunan mahasiswa angkatan 2004 di Departemen Informatika

B: himpunan mahasiswa angkatan 2004 di Departemen Matematika

Maka $|A| = 97$, $|B| = 68$, dan $|A \cap B| = 12$.

Banyaknya mahasiswa angkatan 2004 di Departemen Informatika atau Matematika adalah

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 97 + 68 - 12 = 153$$

Jadi, terdapat 1467 – 153 = 1314 mahasiswa angkatan 2004 yang tidak kuliah di Departemen Matematika atau Informatika.

Soal

- Cari himpunan A dan B jika

  A-B ={1,5,7,8} ,

  B-A ={2,10}

  $A \cap B$ = {3,6,9}
- Misal A = {0,2,4,6,8,10} B={0,1,2,3,4,5,6}

  C = {4,5,6,7,8,9,10}

  Dapatkan $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup B \cup C$, $(A \cap B) \cup C$
- Gambar Diagram Venn untuk kombinasi himpunan A,B,C

  $A \cap (B \cup C)$, $A^c \cap B^c \cap C^c$,$(A\text{-}B) \cup (A\text{-}C) \cup (B\text{-}C)$