Relasi dan Fungsi

Ira Prasetyaningrum

Relasi

- Terdapat dua himpunan X dan Y, *Cartesian product* XxY adalah himpunan dari semua pasangan terurut (x,y) dimana $x \in X$ dan $y \in Y$
  - $XxY = \{(x, y) \mid x \in X \text{ dan } y \in Y\}$

- Contoh :
  - X = {A,B}
  - Y = {1,2,3}
  - Cross Product

    XxY = {(A,1),(A,2),(A,3),(B,1),(B,2),(B,3)}

- Karena merupakan relasi antara dua himpunan, maka disebut relasi biner.

Relasi

Misalkan A dan B himpunan.

Suatu ***relasi biner*** dari A ke B adalah subhimpunan dari $A \times B$.

- Untuk relasi biner R berlaku $R \subseteq A \times B$.
- Digunakan notasi aRb untuk menyatakan $(a,b) \in R$ dan $a\underline{R}b$ untuk menyatakan $(a,b) \notin R$.
- Jika (a, b) merupakan anggota R, a dikatakan berelasi dengan b oleh R.
  - Contoh: X = {1, 2, 3} and Y = {a, b}
  - *R* = {(1,a), (1,b), (2,b), (3,a)} adalah relasi antara X dan Y

Contoh

Misalkan O himpunan orang,

A himpunan angkutan kota, dan

N relasi yang mendeskripsikan siapa yang menaiki angkot tertentu.

O = {Aang, Bida, Charlie, Dina},

A = {Cicaheum-Ledeng (CL), Kelapa-Dago (KD), Stasiun-Sadang Serang (SS)}

N = {(Aang, CL), (Bida, CL), (Bida, KD), (Charlie, SS)}

Artinya Aang naik Cicaheum-Ledeng,

Bida naik Cicaheum-Ledeng dan Kelapa-Dago,

Charlie naik Stasiun-Sadang Serang, dan

Dina tidak menaiki salah satu dari angkot

Relasi pada Himpunan

Definisi.

Suatu relasi *pada* himpunan A adalah relasi dari A ke A.

Relasi pada himpunan A adalah subhimpunan dari $A \times A$.

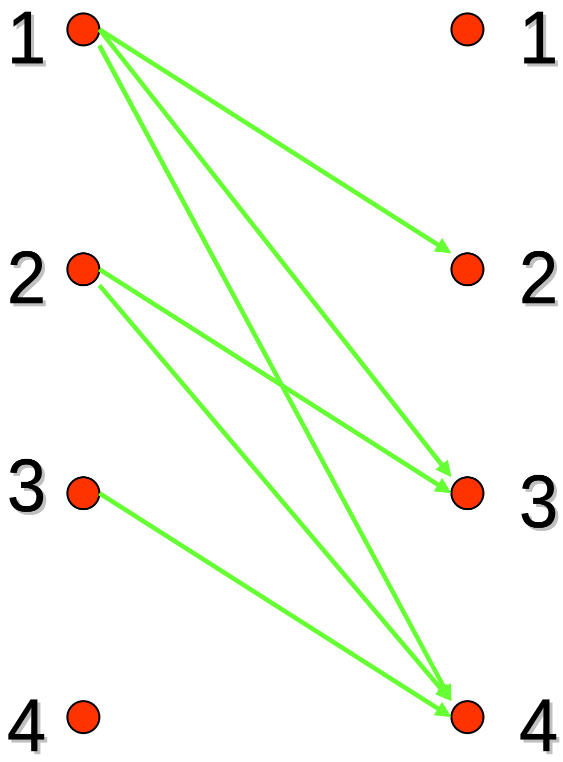
Contoh 2.

Misalkan A = {1, 2, 3, 4}.

Himpunan terurut manakah yang terdapat dalam relasi R = {(a, b) | a < b} ?

{(1, 2),(1, 3),(1, 4),(2, 3),(2, 4),(3, 4)}

Contoh 2...



R	1	2	3	4
1		X	X	X
2			X	X
3				X
4				

Contoh

- $X = \{1, 3, 4, 7, 9, 12, 16\}$ and $Y = \{1, 2, 4, 8, 9\}$

- Didefinisikan $R_1 = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, \text{ and } x = y^2\}$
- Maka $R_1 = \{(?, ?), \ldots\}$

- Didefinisikan $R_2 = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, \text{ and } x^2 = y\}$
- Maka $R_2 = ?$

Contoh

- $X = \{1, 3, 4, 7, 9, 12, 16\}$ and $Y = \{1, 2, 4, 8, 9\}$

- Didefinisikan $R_1 = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, \text{ and } x = y^2\}$
- Maka $R_1 = \{(1, 1), (4, 2), (16, 4)\}$

- Didefinisikan $R_2 = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, \text{ and } x^2 = y\}$
- Maka $R_2 = \{(1, 1), (3, 9)\}$

Banyaknya Relasi pada Himpunan

Ada berapa relasi berbeda yang dapat didefinisikan pada himpunan A dengan n anggota?

Suatu relasi pada A adalah subhimpunan dari $A \times A$.

Ada berapa anggota $A \times A$?

Terdapat n^2 anggota $A \times A$

Ada berapa subhimpunan dari $A \times A$?

Banyaknya subhimpunan yang dapat dibentuk dari suatu himpunan dengan m anggota adalah 2^m.

Jadi, ada 2^{n^2} subhimpunan dapat dibentuk dari $A \times A$.

Sifat Relasi (refleksif)

Definisi.

Relasi R pada himpunan A disebut *refleksif* jika (a,a)∈R untuk setiap anggota a∈A.

Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada a∈R sedemikian sehingga (a,a) ∉ R

Apakah relasi berikut pada {1, 2, 3, 4} refleksif?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)} Tidak.

R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)} Ya.

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} Tidak.

Sifat Relasi (simetris)

Definisi.

- Relasi R pada himpunan A disebut *simetris* / (*symmetric*)

  jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$ untuk $a,b \in A$

- Relasi *R* adalah *antisymmetric* pada himp A sedemikian sehingga $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$ hanya jika $a = b$ untuk $a,b \in A$
  - atau
- jika untuk semua $a,b \in A$ sedemikian sehingga $a \neq b$, jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \notin R$

Simetris dan Antisimetris

- Definisi tersebut menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A bukan antisimetris jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$
- Istilah simetris dan antisimetris tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus.
- Namun relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a,b) yang mana $a \neq b$

Sifat Relasi (transitif)

Definisi.

Relasi R pada himpunan A disebut *transitif* jika setiap kali $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$, maka $(a,c) \in R$ untuk $a,b,c \in A$.

Apakah relasi berikut pada {1, 2, 3, 4} transitif?

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)} Ya.

R = {(1, 3), (3, 2), (2, 1)} Tidak.

R = {(2, 4), (4, 3), (2, 3), (4, 1)} Tidak.

Contoh

- **Misalkan R adalah Relasi pada X = {1,2,3,4} yang didefinisikan oleh (x,y)$\in$R jika x<=y x,y $\in$ X.**
- **R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)}**

- Relasi R adalah refleksif
- (*antisymmetric)* (2,3) $\in$ R tetapi (3,2) $\notin$ R
- Transitif

Contoh

- Merupakan Transitif

Pasangan Berbentuk			Pasangan Berbentuk		
(x,y)	(y,z)	(x,z)	(x,y)	(y,z)	(x,z)
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(2,2)	(2,2)	(2,2)
(1,1)	(1,2)	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)
(1,1)	(1,3)	(1,3)	(2,2)	(2,4)	(2,4)
(1,1)	(1,4)	(1,4)	(2,3)	(3,3)	(2,3)
(1,2)	(2,2)	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(2,4)
(1,2)	(2,3)	(1,3)	(2,4)	(4,4)	(2,4)
(1,2)	(2,4)	(1,4)	(3,3)	(3,3)	(3,3)
(1,3)	(3,3)	(1,3)	(3,3)	(3,4)	(3,4)
(1,3)	(3,4)	(1,4)	(3,4)	(4,4)	(3,4)
(1,4)	(4,4)	(1,4)	(4,4)	(4,4)	(3,4)

Contoh

- Apakah Relasi pada Himpunan A = {1,2,3,4} adalah Refleksif, symmetric, antisymmetric dan transitif ?

- R1 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1) (4,4)}
- R2 = {(1,1) (1,2) (2,1)}
- R3 = {(1,1) (1,2) (1,4) (2,1) (2,2) (3,3) (4,1) (4,4)}
- R4 = {(2,1) (3,1) (3,2) (4,1) (4,2) (4,3)}
- R5 = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,2) (2,3) (2,4) (3,3) (3,4) (4,4)}
- R6 = {(3,4)}

Jawab

- R1 =
- R2 = *symmetric*
- R3 = refleksif, *symmetric*
- R4 = anti*symmetric, transitif*
- R5 = refleksif, anti*symmetric, transitif*
- *R6* = anti*symmetric, transitif*

Soal

Relasi pada himpunan integer

- R1 = $\{(a,b) \mid a \leq b\}$
- R2 = $\{(a,b) \mid a > b\}$
- R3 = $\{(a,b) \mid a = b \text{ atau } a = -b\}$
- R4 = $\{(a,b) \mid a=b\}$
- R5 = $\{(a,b) \mid a = b+1\}$
- R6 = $\{(a,b) \mid a + b = 3\}$

Jawab

- R1 = refleksif, antisimetris, transitif
- R2 = antisimetris, transitif
- R3 = refleksif, simetris, transitif
- R4 = refleksif, simetris, transitif
- R5 = antisimetris
- R6 = simetris

Mengkombinasi Relasi

Relasi adalah himpunan, sehingga operasi himpunan dapat diaplikasikan .

Jika ada dua relasi R_1 dan R_2, dan keduanya dari himpunan A ke himpunan B, maka terdapat kombinasi

$$R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2,\ \text{atau}\ R_1 - R_2$$

Mengkombinasi Relasi

- **Contoh :**
- **A = {1,2,3} B = {1,2,3,4}. Relasi R1 = {(1,1) (2,2) (3,3)} dan**
- **R2 = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4)} jika dikombinasikan akan mendapatkan**
- **R1 $\cup$ R2 = {(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,2) (3,3)}**
- **R1 $\cap$ R2 = {(1,1)}**
- **R1 – R2 = {(2,2) (3,3)} R2 – R1 = {(1,2) (1,3) (1,4)}**

Mengkombinasikan Relasi

- R_1 adalah relasi dari X ke Y
- R_2 adalah relasi dari Y ke Z

- Komposisi dari R_1 dan R_2, dinyatakan dengan $R_2 \circ R_1$ adalah relasi dari X ke Z didefinisikan dengan $\{(x, z) \mid (x, y) \in R_1$ dan $(y, z) \in R_2$ untuk beberapa $y \in Y\}$

- Contoh :
  - $R_1 = \{(1, 2), (3, 6)\}$
  - $R_2 = \{(2, u), (6, v)\}$
  - Maka $R_2 \circ R_1 = \{(1, u), (3, v)\}$

Contoh 4

Misalkan D dan S relasi pada A = {1, 2, 3, 4}.

D = {(a, b) | b = 5 - a} “b sama dengan (5 – a)”

S = {(a, b) | a < b} “a lebih kecil dari b”

D = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

(2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

S = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

D memetakan suatu anggota a ke anggota (5 – a),

S◦D = {

dan setelah itu S memetakan (5 – a) pada semua anggota yang lebih besar dari (5 – a), yang menghasilkan

S◦D = {(a,b) | b > 5 – a} atau S◦D = {(a,b) | a + b >

Kuasa dari Relasi

Definisi.

Misalkan R relasi pada himpunan A.

Kuasa R^n, n = 1, 2, 3, …, didefinisikan secara induktif

$$R^1 = R$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

Dengan kata lain:

$$R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R \quad \text{(sebanyak n kali)}$$

Teorema.

Relasi R pada A transitif jika dan hanya jika $R^n \subseteq R$ untuk setiap bilangan bulat positif n.

Contoh :

- Misalkan R = {(1,1), (2,1) (3,2) (4,3). Cari Rn n = 1,2,3,4, ...
- R2 = R o R maka diperoleh

  R2 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)},
- R3 = R2 o R

  R3 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)},
- R4 = {(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)} = R3
- Rn = R3 untuk n = 5, 6, 7, . . .

Representasi Relasi

Beberapa cara untuk merepresentasikan relasi: e.g., pasangan terurut.

Dua cara lain:

matriks nol-satu dan *graf berarah (digraf).*

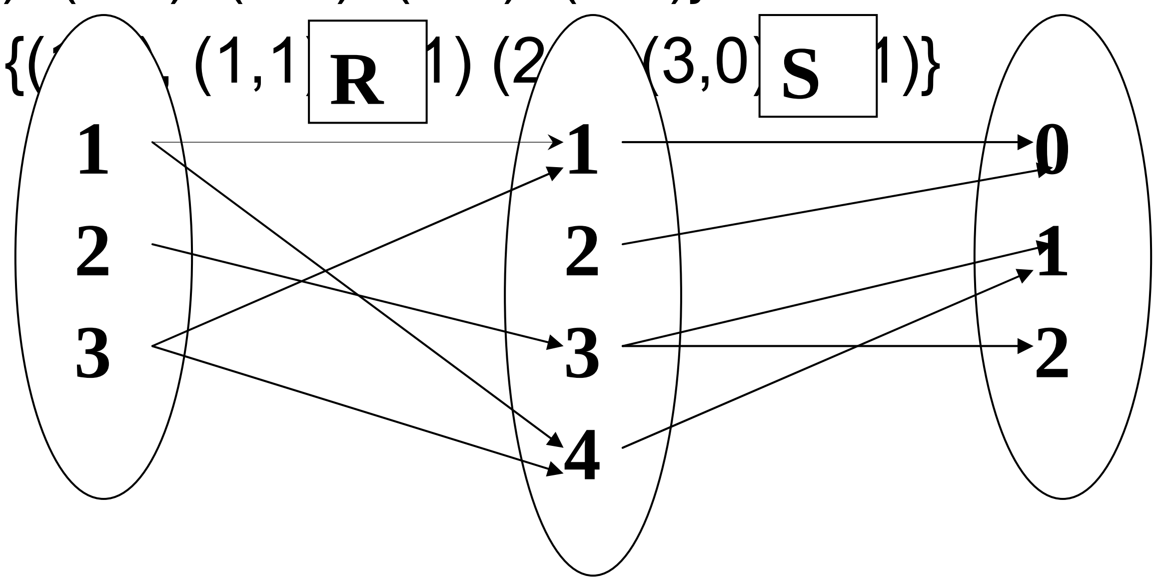
Jika R relasi dari A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ke B = $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, maka R dapat direpresentasikan oleh *matriks nol-satu* $M_R = [m_{ij}]$ dengan

$$m_{ij} = 1, \text{ jika } (a_i, b_j) \in R, \text{ dan}$$
$$m_{ij} = 0, \text{ jika } (a_i, b_j) \notin R.$$

M merupakan matriks berukuran mxn

Contoh :

- A = {1,2,3}
- B = {1,2,3,4}
- C = {0,1,2}
- R = {(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)}
- S ={(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)}
- S o R = {(, (1,1 1) (2 (3,0 1)}



Matematika Diskrit

Fungsi

Fungsi

- Fungsi merupakan jenis khusus pada relasi

Definisi Fungsi :

- Misalkan terdapat himpunan A dan B. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

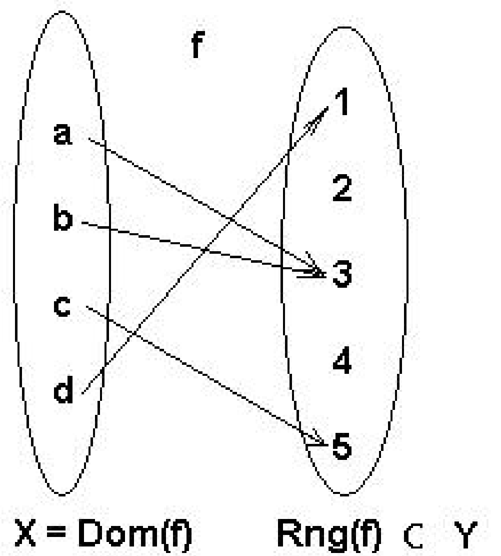
  $f : A \rightarrow B$

  yang artinya f **memetakan** A ke B
- Nama lain fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**
- Ditulis $f(a) = b$

Fungsi

- Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f
- Himpunan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut range (jelajah)
- *Range* dari f =

  { b | b = f(a) untuk beberapa x $\in$A}

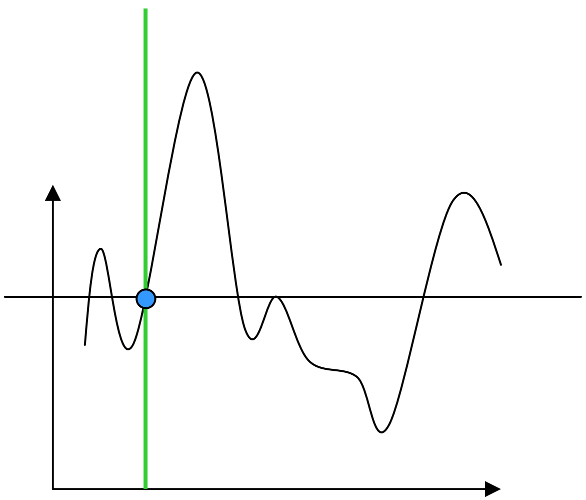


  – Example:
  – Dom(f) = X = {a, b, c, d},
  – Rng(f) = {1, 3, 5}

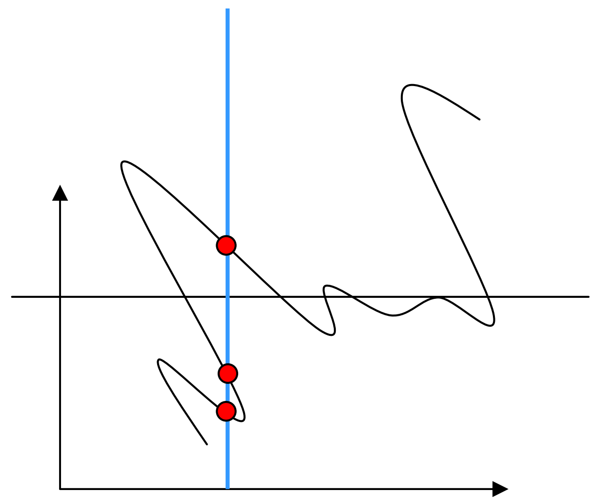
Contoh

- Daerah asal A = {1,2,3} B = {u,v,w}
- f = {(1,u),(2,v),(3,w)} → fungsi
- f = {(1,u),(2,u),(3,v)} → fungsi
- f = {{(1,u),(2,u),(1,w)} → bukan fungsi

Contoh



fungsi

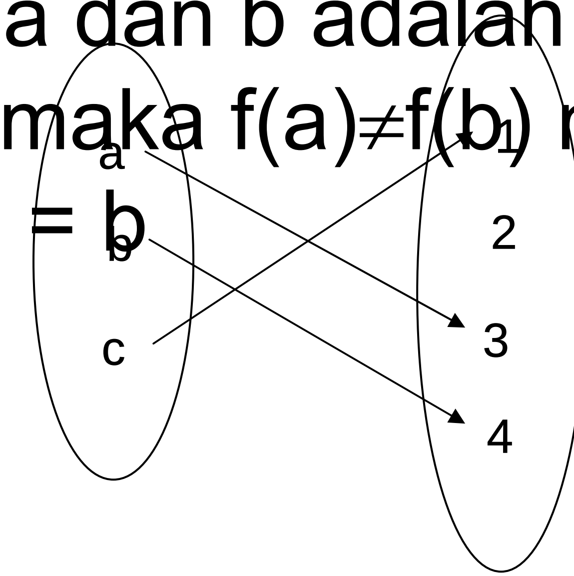


Bukan fungsi

- → 1 intersection
- → melanggar pada saat > 1

Fungsi One-to-one (satu ke satu)

- Fungsi f dikatakan satu ke satu (one-to-one) atau injective jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama.
- Dengan kata lain jika a dan b adalah anggota himpunan A maka $f(a) \neq f(b)$ maka implikasinya adalah a = b



Properties of Functions

- f(Linda) = Moscow
- f(Max) = Boston
- f(Kathy) = Hong Kong
- f(Peter) = Boston

- Is f one-to-one?

- No, Max and Peter are mapped onto the same element of the image.

g(Linda) = Moscow

g(Max) = Boston

g(Kathy) = Hong Kong

g(Peter) = New York

Is g one-to-one?

Yes, each element is assigned a unique element of the image.

Contoh

- Misalkan $f : Z \rightarrow Z$. Tentukan apakah $f(x)=x^2 + 1$ dan $f(x) = x – 1$ merupakan fungsi one to one ?

- $f(x)=x^2 + 1$ bukan fungsi one to one karena $f(2) = f(-2) = 5$
- $F(x) = x – 1$ adalah fungsi one to one

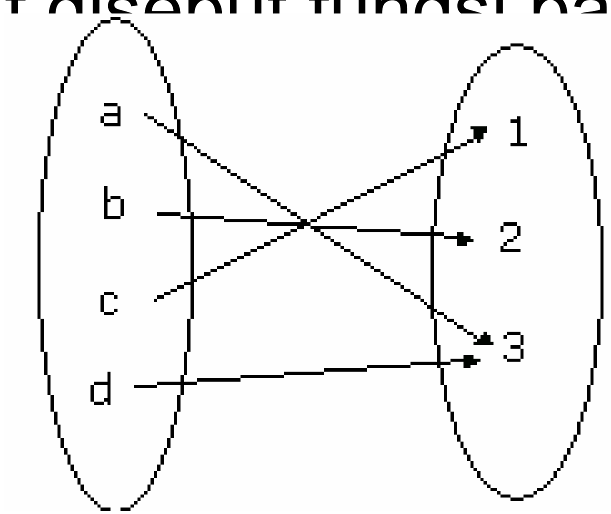
Contoh

- Fungsi $f(x) = 2^x$ dari himp bil real
  - → fungsi one-to-one
- Fungsi $f(x) = x^2$
  - → bukan one-to-one,

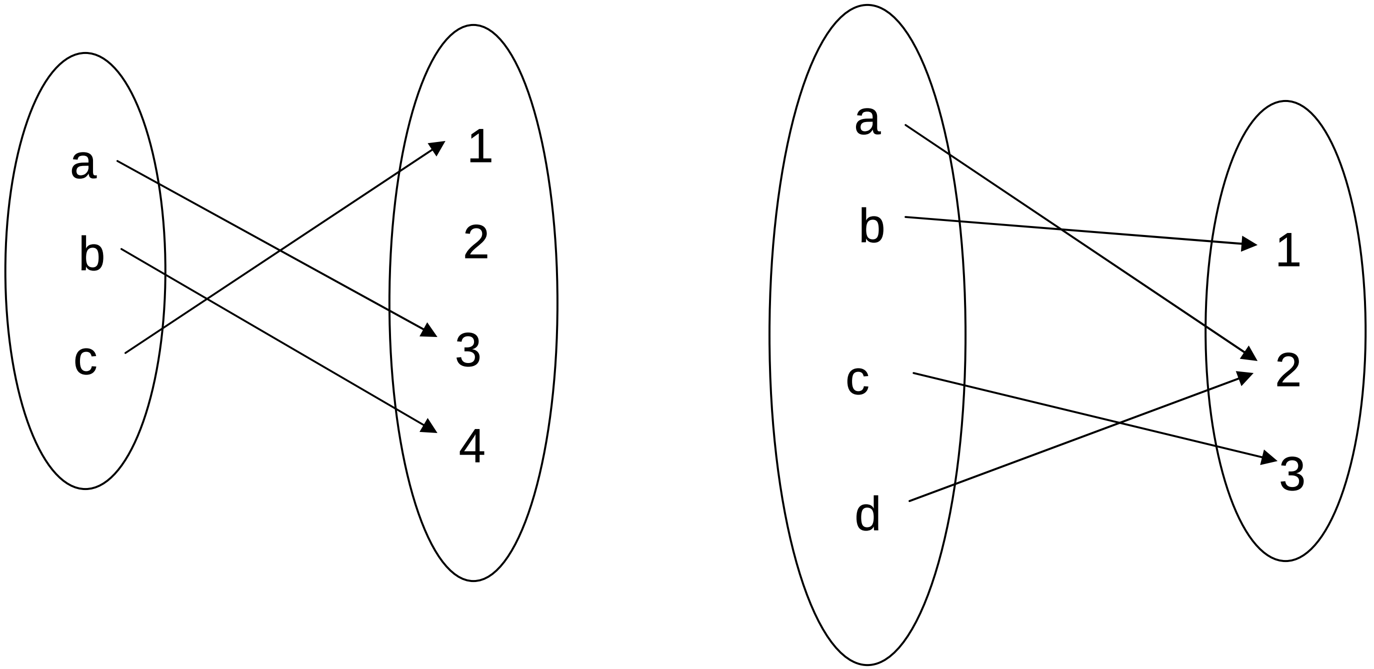
karena untuk setiap bil real x $f(x) = f(-x)$.

Fungsi Onto

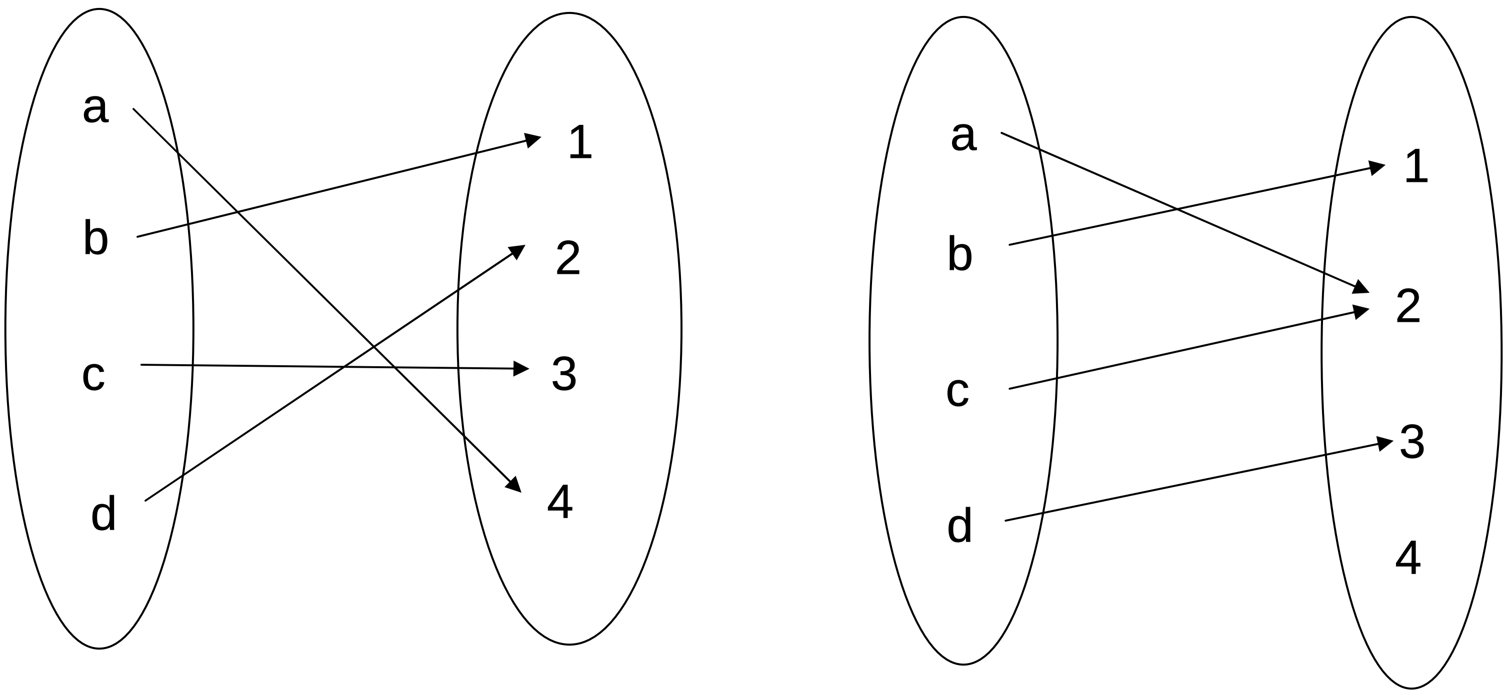
- Fungsi f dikatakan onto atau surjektif jika setiap elemen himp B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.
- Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan range dari f
- Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B



Onto ? One to One ?



Onto ? One to One ?



Jawaban

- One to one
- Onto
- One to one dan Onto
- Bukan One to one dan Onto

Fungsi Bijektif (Bijective)

Fungsi $f : X \rightarrow Y$ bijektif $\Leftrightarrow$

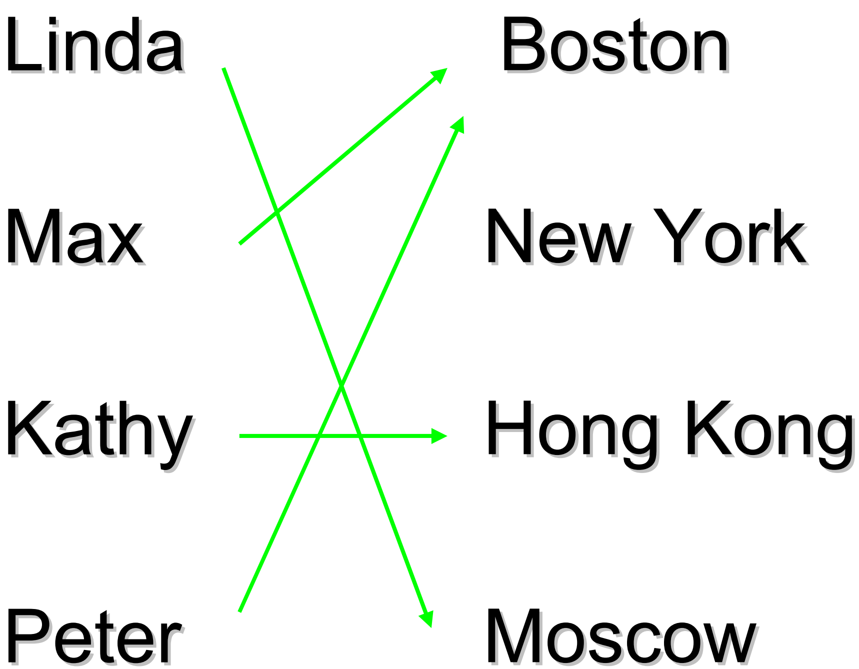
f adalah one-to-one

dan onto

– Contoh

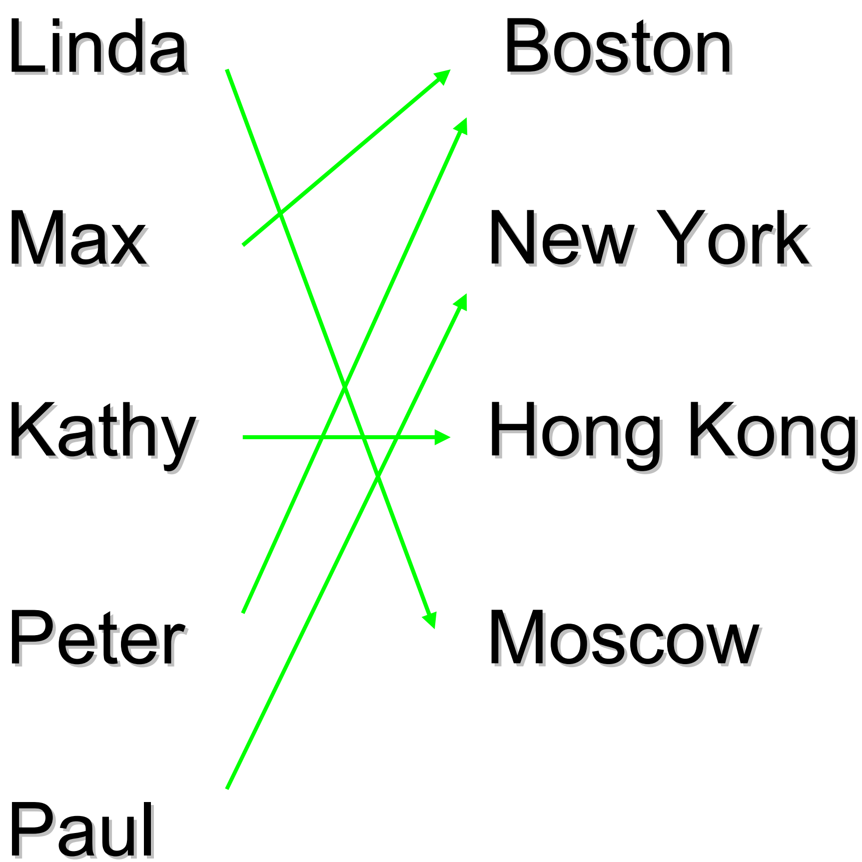
- Fungsi linear $f(x) = ax + b$
- Fungsi $f(x) = x^3$

Properties of Functions



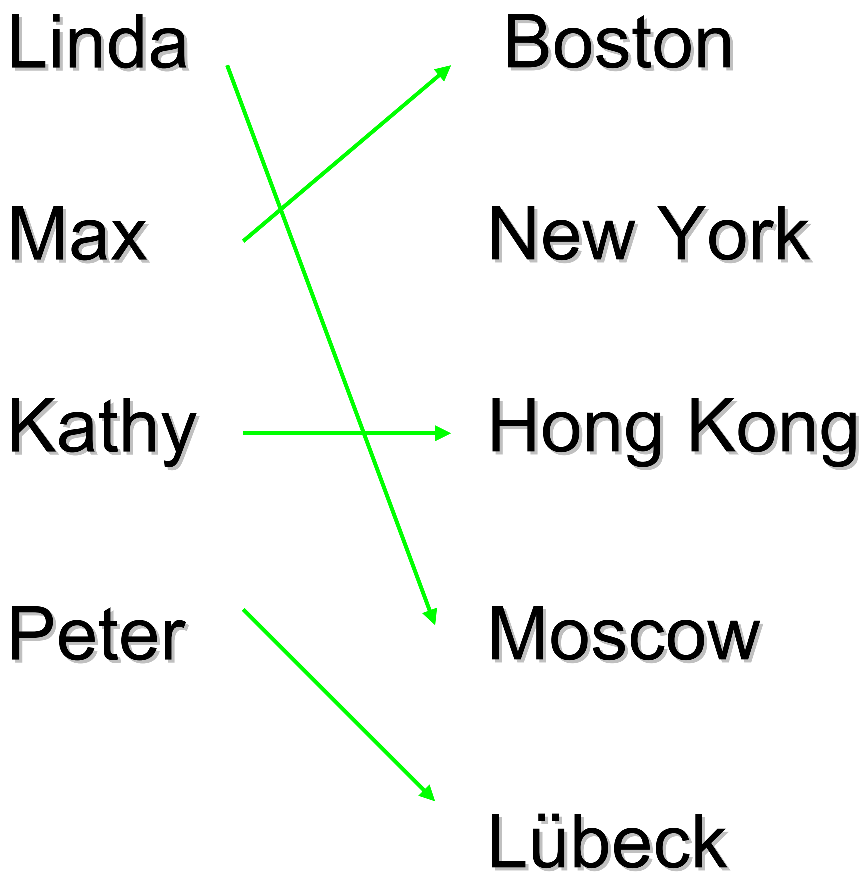
- Is f injective?
- No.
- Is f surjective?
- No.
- Is f bijective?
- No.

Properties of Functions



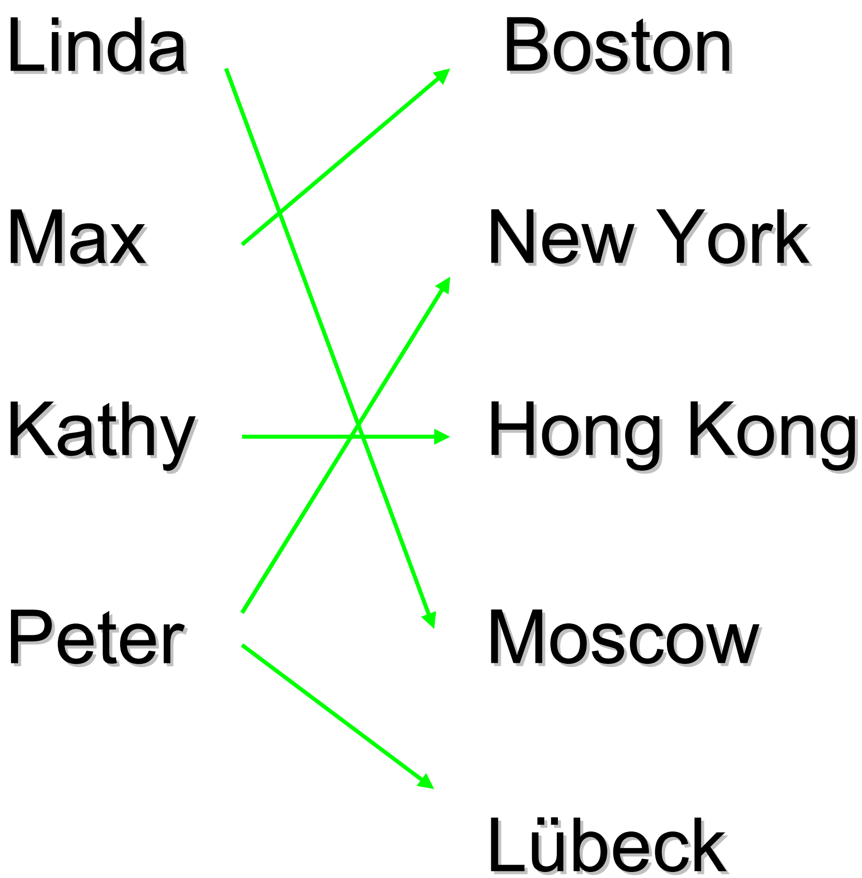
- Is f injective?
- No.
- Is f surjective?
- Yes.
- Is f bijective?
- No.

Properties of Functions



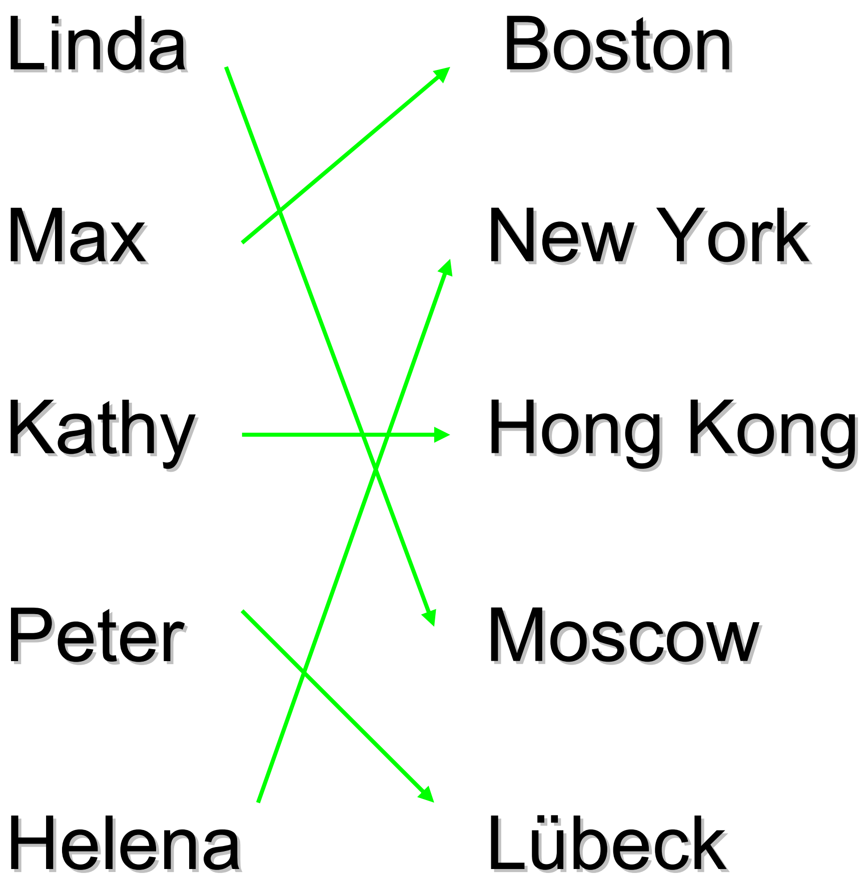
- Is f injective?
- Yes.
- Is f surjective?
- No.
- Is f bijective?
- No.

Properties of Functions



- Is f injective?
- No! f is not even a function!

Properties of Functions



- Is f injective?
- Yes.
- Is f surjective?
- Yes.
- Is f bijective?
- Yes.

Fungsi Invers

- Terdapat sebuah fungsi y =f(x), fungsi inverse f^{-1} adalah himpunan {(y,x) | y =f(x)}.
- Fungsi one to one sering dinamakan juga fungsi invertible (dapat dibalikkan)
- Fungsi bukan one to one sering dinamakan juga fungsi not invertible (tidak dapat dibalikkan)

Inversion

Example:

$f(\text{Linda}) = \text{Moscow}$

$f(\text{Max}) = \text{Boston}$

$f(\text{Kathy}) = \text{Hong Kong}$

$f(\text{Peter}) = \text{Lübeck}$

$f(\text{Helena}) = \text{New York}$

Clearly, f is bijective.

The inverse function f^{-1} is given by:

$f^{-1}(\text{Moscow}) = \text{Linda}$

$f^{-1}(\text{Boston}) = \text{Max}$

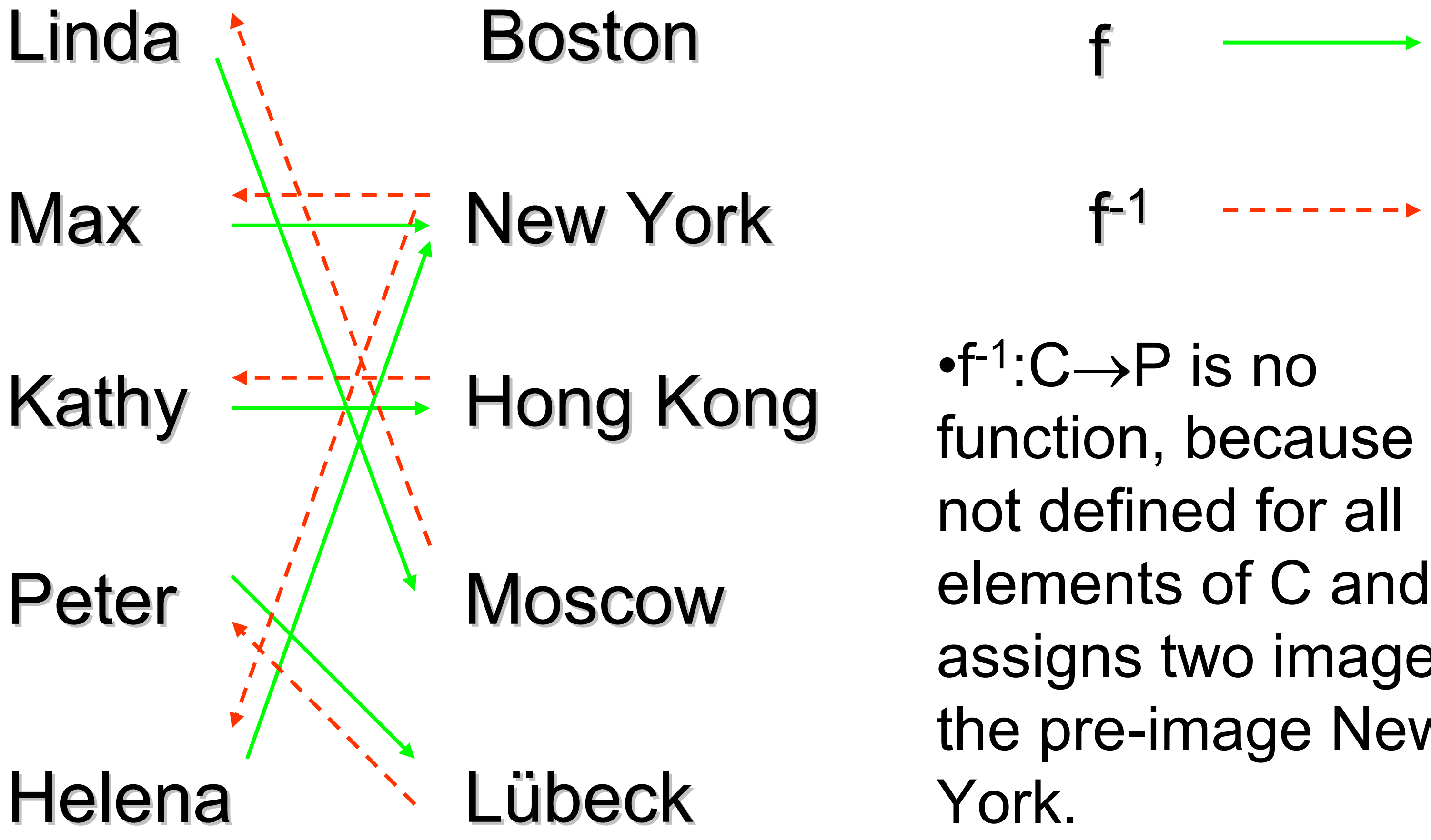
$f^{-1}(\text{Hong Kong}) = \text{Kathy}$

$f^{-1}(\text{Lübeck}) = \text{Peter}$

$f^{-1}(\text{New York}) = \text{Helena}$

Inversion is only possible for bijections (= invertible functions)

Inversion



- $f^{-1}: C \rightarrow P$ is no function, because it is not defined for all elements of C and assigns two images to the pre-image New York.

Contoh :

- Daerah asal A = {1,2,3}
- Daerah asal B = {u,v,w}
- F = {(1,u),(2,w),(3,v)}

  – Adalah fungsi one-to-one

  – Invers f^{-1} = {(u,1),(w,2),(v,3)}

Contoh :

- Tentukan invers dari $f(x) = x – 1$

- Fungsi $f(x) = x – 1$ adalah fungsi one to one, jadi mempunyai invers
- $f(x) = x – 1$
- $y = x – 1$
- $x = y + 1$
- Maka fungsi invers $f^{-1}(x) = x + 1$

Contoh

- Tentukan fungsi invers $f(x) = x^2 + 1$
- Fungsi $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi one to one sehingga tidak memiliki fungsi invers

Komposisi fungsi

- Terdapat dua fungsi $g : X \rightarrow Y$ dan $f : Y \rightarrow Z$, komposisi $f \circ g$ didefinisikan sebagai berikut :
- $f \circ g\ (x) = f(g(x))$ untuk setiap $x \in X$
- Contoh :
  - $g(x) = x^2 - 1$,
  - $f(x) = 3x + 5$.
  - $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 5) = (3x + 5)^2 - 1$
- Komposisi fungsi memenuhi hokum assosiatif : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ tetapi tidak memenuhi hukum komutatif : $f \circ g \neq g \circ f$.

Composition

- The **composition** of two functions $g:A \to B$ and $f:B \to C$, denoted by $f \circ g$, is defined by
- $(f \circ g)(a) = f(g(a))$
- This means that
- **first**, function g is applied to element $a \in A$, mapping it onto an element of B,
- **then**, function f is applied to this element of B, mapping it onto an element of C.
- **Therefore**, the composite function maps from A to C.

Composition

- Example:

- $f(x) = 7x – 4$, $g(x) = 3x$,
- $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$

- $(f\circ g)(5) = f(g(5)) = f(15) = 105 – 4 = 101$

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 21x - 4$

Composition

- Composition of a function and its inverse:

- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

- The composition of a function and its inverse is the **identity function** $i(x) = x$.

Graphs

- The **graph** of a function $f:A \rightarrow B$ is the set of ordered pairs $\{(a, b) \mid a \in A \text{ and } f(a) = b\}$.

- The graph is a subset of $A \times B$ that can be used to visualize f in a two-dimensional coordinate system.

Floor and Ceiling Functions

- The **floor** and **ceiling** functions map the real numbers onto the integers ($\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$).
- The **floor** function assigns to $r \in \mathbf{R}$ the largest $z \in \mathbf{Z}$ with $z \leq r$, denoted by $\lfloor r \rfloor$.
- **Examples:** $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$, $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$
- The **ceiling** function assigns to $r \in \mathbf{R}$ the smallest $z \in \mathbf{Z}$ with $z \geq r$, denoted by $\lceil r \rceil$.
- **Examples:** $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil 0.5 \rceil = 1$, $\lceil -3.5 \rceil = -3$