

# **Trigonometri**

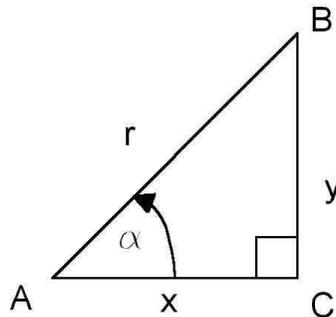
**Ira Prasetyaningrum**

## I. Pengertian:

***Trigonometri*** merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari hubungan antara perbandingan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku dengan sudut-sudutnya. Kata trigonometri berasal dari bahasa Latin, ‘trigonom’ (tiga sudut) dan ‘metro’ (pengukuran).

## II. Perbandingan Trigonometri

Perhatikanlah gambar di bawah  
Segitiga ABC siku-siku di C dimana,  
 $r$  adalah sisi di depan sudut siku-siku,  
 $y$  adalah sisi di depan sudut yang sedang kita  
bicarakan dan  
 $x$  adalah sisi yang lainnya.



Hubungan antara  $x$ ,  $y$  dan  $r$  adalah  $x^2 + y^2 = r^2$

# Perbandingan trigonometri antara sisi-sisi pada segi tiga siku-siku

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

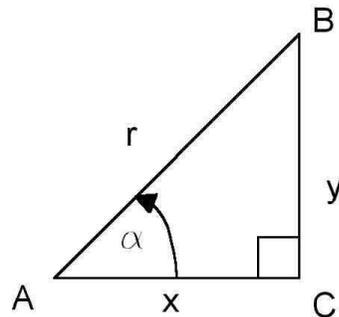
$$\sec \alpha = \frac{r}{x}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$



## Contoh:

Tentukan nilai  $x$ ,  $y$  dan  $r$  dari segi tiga siku-siku disamping jika sudut yang kita bicarakan adalah

a. sudut A

b. sudut B

## Jawab:

Jika kita bicara sudut A

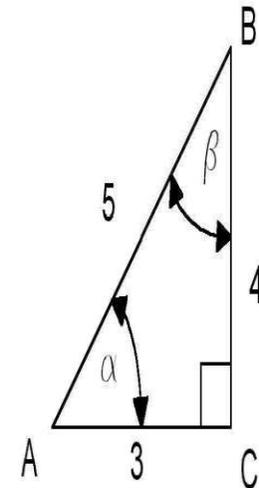
maka nilai  $r = 5$ ,  $y = 4$  dan

$x = 3$ .

Jika kita bicara sudut B,

maka nilai  $r = 5$ ,  $y = 3$  dan

$x = 4$ .



## **Contoh:**

**Dari gambar pada contoh di atas,  
tentukanlah perbandingan  
trigonometrinya !**

**a. Untuk sudut  $\alpha$**

**b. Untuk sudut  $\beta$**

# Jawab

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\sec \beta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec} \beta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

### **III. Koordinat Kartesius dan Kutub**

**Koordinat kartesius  $P(x,y)$  dimana:**

**$x$  = absis**

**$y$  = ordinat**

**Koordinat kutub atau polar  $P(r, \alpha)$  dimana:**

**$r$  = jarak titik tersebut dengan titik asal  $O(0,0)$**

**$\alpha$  = sudut yang dibentuk antara sumbu  $x$  positif dengan garis  $r$ .**

## Contoh

Nyatakan dalam koordinat kartesius dari titik  $P(4, 120^\circ)$ .

**Jawab:**

Dari soal tersebut didapat  $r = 4$  dan  $\alpha = 120$

$$\begin{aligned}x &= r \cos \alpha = 4 \cos 120 = 4 \cos(180-60) \\ &= 4(-\cos 60) = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= r \sin \alpha = 4 \sin 120 = 4 \sin(180-60) \\ &= 4 \sin 60 = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

sehingga koordinat kartesiusnya adalah  $P(-2, 2\sqrt{3})$

## Contoh:

**Ubahlah dalam koordinat kutub dari titik P(-1,1)**

**Jawab:**

**Dari soal kita dapat  $x = -1$  dan  $y = 1$**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

**Untuk menentukan nilai  $a$  dari  $\text{tg } \alpha = -1$ , abaikan terlebih dahulu tanda negatifnya sehingga kita dapat  $\alpha = 45^\circ$ , kemudian kita lihat titik P yaitu terletak di kuadran II maka  $\alpha = 45^\circ$  dipindahkan ke kuadran II sehingga kita dapat  $180 - \alpha = 180 - 45 = 135^\circ$ . Sehingga koordinat kutub dari titik tersebut adalah  $(\sqrt{2}, 135^\circ)$**

## IV. Penjumlahan dan Selisih Dua Sudut Trigonometri

### 1. Penjumlahan Dua Sudut ( $\alpha + \beta$ )

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \square$$

## 2. Selisih Dua Sudut ( $\alpha - \beta$ )

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}$$

## Contoh:

- 1. Hitunglah nilai cosinus sudut di bawah ini menggunakan rumus cosinus jumlah atau selisih dua sudut!**
  - a. 75°**
  - b. 150°**

**Jawab:**

**a. Ingat:  $75 = 45 + 30$**

$$\mathbf{\cos 75 = \cos (45 + 30)}$$

$$\mathbf{= \cos 45 \cdot \cos 30 - \sin 45 \cdot \sin 30}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{6} - \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

**b. Ingat:  $15 = 60 - 45$**

$$\cos 15 = \cos (60 - 45)$$

$$= \cos 60 \cdot \cos 45 + \sin 60 \cdot \sin 45$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{2} - \frac{1}{4} \sqrt{6}$$

$$= \frac{1}{4} (\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

# PERSAMAAN TRIGONOMETRI YANG SEDERHANA

Penyelesaian Persamaan Trigonometri Dasar :

1. Jika  $\sin x^\circ = \sin \alpha^\circ$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

Maka :  $x_1 = \alpha + k \cdot 360$  atau

$$x_2 = (180 - \alpha) + k \cdot 360$$

*$k \in \text{Bilangan Bulat}$*

Gimana sih, contoh soalnya  
?? Kita bahas bersama yuk

....



*Contoh Soal :*

Tentukan Penyelesaian dari Persamaan berikut,  
untuk  $0^{\circ} \leq x \leq 360^{\circ}$  :

a.  $\sin x^{\circ} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

b.  $\sin (x+30)^{\circ} - 1 = 0$

*Jawab*

a.  $\sin x^{\circ} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin x = \sin (-60^{\circ})$

$x_1 = (-60^{\circ}) + k \cdot 360$

atau

$x_2 = 180 - (-60^{\circ}) + k \cdot 360$

$k = 0 \Rightarrow x = -60^{\circ}$  ( tdk. memenuhi )

$k = 1 \Rightarrow x = 300^{\circ}$

$k = 2 \Rightarrow x = 660^{\circ}$  ( tdk. memenuhi )

$x_2 = 240^{\circ} + k \cdot 360$

$k = 0 \Rightarrow x = 240^{\circ}$

$k = 1 \Rightarrow x = 600^{\circ}$  (??)

Jadi, Harga x yang memenuhi =  $240^{\circ}$  atau  $300^{\circ}$

b.  $\sin (x+30)^{\circ} - 1 = 0$

$\sin (x+30)^{\circ} = 1$

$\sin (x+30)^{\circ} = \sin 90^{\circ}$

dengan cara sama, didapat??

harga x yang memenuhi  
adalah  $x = 60^{\circ}$

## Penyelesaian Persamaan Trigonometri Dasar :

2. Jika  $\cos x^\circ = \cos \alpha^\circ$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

Maka :  $x_1 = \alpha + k \cdot 360$  atau

$$x_2 = (-\alpha) + k \cdot 360$$

*k \in \text{Bilangan Bulat}*



**Contoh Soal :** Tentukan Himpunan Penyelesaiannya :

$$\cos 3x^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{untuk } 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

**Jawab**

a.  $\cos 3x^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\cos 3x = \cos 30^\circ$$

$$3x_1 = 30^\circ + k \cdot 360$$

atau

$$3x_2 = -30^\circ + k \cdot 360$$



*Lanjutan... .*

$$\cos 3x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\cos 3x = \cos 30^\circ$$

$$3x_1 = 30^\circ + k \cdot 360$$

$$x_1 = 10^\circ + k \cdot 120$$

$$k = 0 \Rightarrow x = 10^\circ$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 130^\circ$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 250^\circ$$

$$\text{atau} \quad 3x_2 = -30^\circ + k \cdot 360$$

$$\text{atau} \quad x_2 = -10^\circ + k \cdot 120$$

$$k = 0 \Rightarrow x = -10^\circ$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 110^\circ$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 230^\circ$$

$$k = 3 \Rightarrow x = 350^\circ$$

( tdk. memenuhi )

Jadi, Himpunan Penyelesaiannya adalah =

$$\{ 10^\circ, 110^\circ, 130^\circ, 230^\circ, 250^\circ, 350^\circ \}$$

## Penyelesaian Persamaan Trigonometri Dasar :

$$3. \quad \text{Jika } \tan x^\circ = \tan \alpha^\circ \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Maka : } x_{1,2} = \alpha + k \cdot 180$$

*k \in \text{Bilangan Bulat}*



**Contoh Soal :** Tentukan Himpunan Penyelesaiannya :

$$\tan 2x^\circ = \sqrt{3} \quad \text{untuk } 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$$

*Jawab :*

$$\tan 2x^\circ = \sqrt{3}$$

$$\tan 2x = \tan 60^\circ$$

$$2x_{1,2} = 60^\circ + k \cdot 180$$

$$x_{1,2} = 30^\circ + k \cdot 90$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 30^\circ$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 120^\circ$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 210^\circ$$

$$k = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 300^\circ$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad x = ??$$

Jadi, Himpunan Penyelesaiannya adalah =

$$\{30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 300^\circ\}$$





## Soal Latihan :

1. Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan

$$\sqrt{3} \tan 2x^\circ - 1 = 0 \quad \text{untuk } 0^\circ \leq x \leq 360^\circ, \quad \text{adalah } \dots$$

- a.  $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 195^\circ, 285^\circ$       d.  $75^\circ, 105^\circ, 195^\circ, 285^\circ$   
b.  $15^\circ, 105^\circ, 195^\circ, 285^\circ$       e.  $75^\circ, 105^\circ, 285^\circ$   
c.  $105^\circ, 195^\circ, 285^\circ$



2. Jika  $\sin(x - 15)^\circ = \cos 55^\circ$       untuk  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

Maka salah satu nilai  $x$  yang memenuhi = ... .

- a.  $7^\circ$       c.  $42^\circ$       e.  $76^\circ$   
b.  $15^\circ$       d.  $52^\circ$

3. Jika  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  dan  $x$  memenuhi persamaan

$$2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0, \quad \text{maka } \sin x = \dots$$

- a.  $\left\{ \frac{1}{5} \sqrt{5} \text{ dan } \frac{2}{5} \sqrt{5} \right\}$       d.  $\{1\}$   
b.  $\left\{ \frac{1}{5} \sqrt{5} \right\}$       e.  $\{ \}$   
c.  $\left\{ \frac{2}{5} \sqrt{5} \right\}$

(UMPTN '94)

