LIMIT & KEKONTINUAN

IRA PRASETYANINGRUM

Bilangan Tidak Tertentu

Nol = Bilangan yang menyatakan banyaknya elemen himpunan kosong

Misal : A={Orang yang Istrinya 1000}

Terdapat bilangan x mendekati 0 dari kiri/bawah/negatif

Terdapat Bilangan x mendekati 0 dari kanan/atas/positif

Terdapat Bilangan x menuju tidak berhingga atau x naik tidak berhingga

Terdapat bilangan x menuju minus tidak berhingga atau turun minus tidak berhingga

Bilangan tidak tertentu = bilangan yang diberi hasil apa saja akan bernilai benar

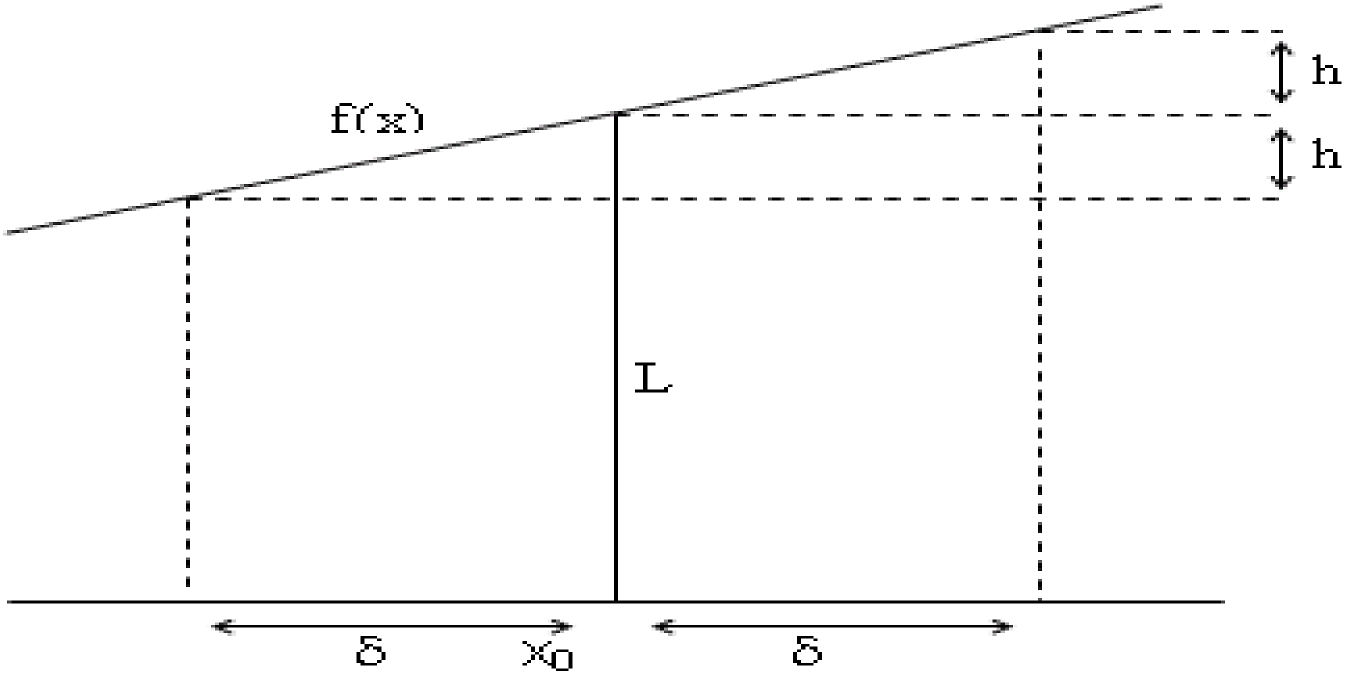
Bilangan tidak tertentu dimunculkan sebab sering dikacaukan antara bilangan tertentu dan tidak tertentu pada operasi hitung untuk bilangan 0, 1, dan ∞

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 . \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞

Definisi

- $f(x)$ dikatakan mempunyai limit L untuk $x \rightarrow x_0$, bila setiap bilangan positif h yang diberikan, dapat ditunjukkan bilangan positif δ sedemikian hingga untuk semua harga x yang memenuhi $0 < |x - x_0| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < h$.
- Pernyataan $0 < |x - x_0| < \delta$ berarti untuk semua x yang memenuhi $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Ilustrasi



f(x) mempunyai limit L untuk x → x0 disajikan dengan :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

- Bilangan l_1 dikatakan limit kanan dari f(x) untuk $x \to x_0^+$, bila untuk setiap h > 0 dapat ditunjuk bilangan positif δ sedemikian hingga untuk $0 < x - x_0 < \delta$ berlaku $|f(x) - l_1| < h$.
- Bilangan l_2 dikatakan limit kiri dari f(x) untuk $x \to x_0^-$, bila untuk setiap h > 0 dapat ditunjuk bilangan positif δ sedemikian hingga untuk $-\delta < x - x_0 < 0$ berlaku $|f(x) - l_2| < h$.
- F(x) dikatakan mempunyai limit L untuk $x \to x_0$, bila limit kanan dan limit kiri dari f(x) adalah sama yaitu sama dengan L, atau :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Pengertian limit secara intuisi

Perhatikan fungsi

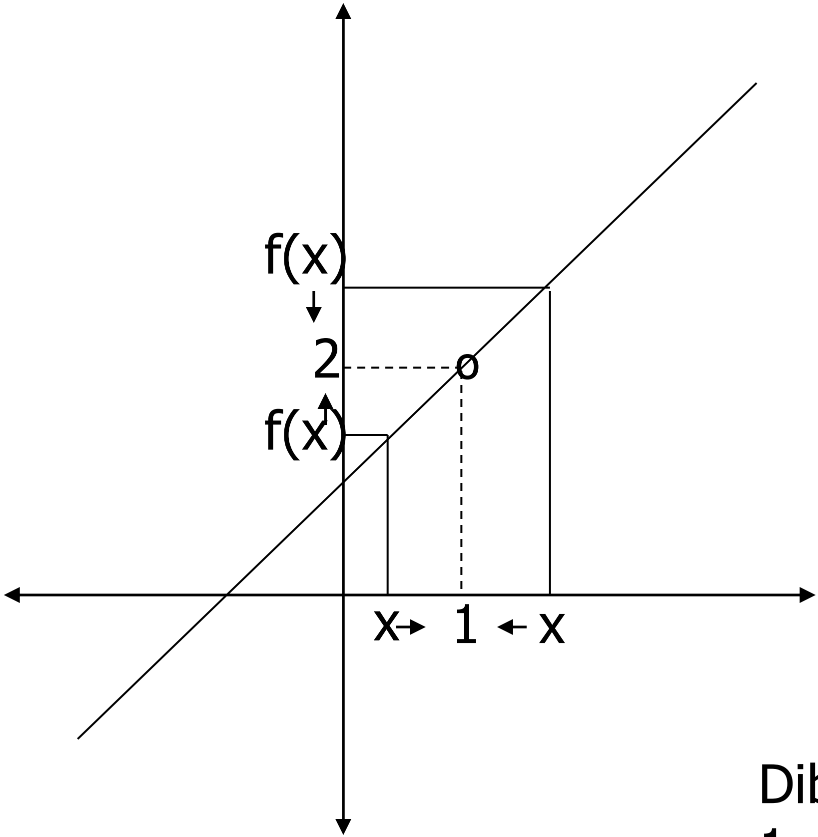
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di x=1, karena di titik tersebut f(x) berber
0/0. Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai f(x) jika x mendekati 1

Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai f(x) bila x mendekati 1,
seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	$\rightarrow$ 1 $\leftarrow$	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\rightarrow$? $\leftarrow$	2.0001	2.001	2.01	2.1

Secara grafik



Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa f(x) mendekati 2 jika x mendekati 1

Secara matematis dapat dituliskan Sebagai berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dibaca " limit dari $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 2

Definisi(limit secara intuisi). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berar bahwa bilamana x dekat, tetapi berlainan dengan c, maka f(x) dekat ke L

Contoh

1. $\lim_{x \to 1} 3x + 5 = 8$

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$

3. $\lim_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \to 9} \dfrac{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \sqrt{x} + 3 = 6$

4. $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$

   Ambil nilai x yang mendekati 0, seperti pada tabel berikut

x	$2/\pi$	$2/2\pi$	$2/3\pi$	$2/4\pi$	$2/5\pi$	$2/6\pi$	$2/7\pi$	$2/8\pi$	$\longrightarrow$ 0
$\sin(1/x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	$\longrightarrow$?

Dari tabel terlihat bahwa bila x menuju 0, sin(1/x) tidak menuju ke satu nilai tertentu sehingga limitnya tidak ada

Limit Kiri dan Limit Kanan

$x \rightarrow \quad c$

Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c, limit disebut limit kiri,

notasi

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

$c \quad \leftarrow x$

Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c, limit disebut limit kanan,

notasi

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

Hubungan antara limit dengan limit sepihak(kiri/kanan)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Jika $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ maka $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

Contoh Diketahui

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \; x \le 0 \\ x \; , & 0 < x < 1 \\ 2 + x^2 \; , & x \ge 1 \end{cases}$$

a. Hitung $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b. Hitung) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ Jika ada

c. Hitung $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d. Gambarkan grafik f(x)

Jawab

a. Karena aturan fungsi berubah di x=0, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

b. Karena aturan fungsi berubah di x=1, maka perlu dicari limit kiri dan limit kanan di x=1

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x = 1$$

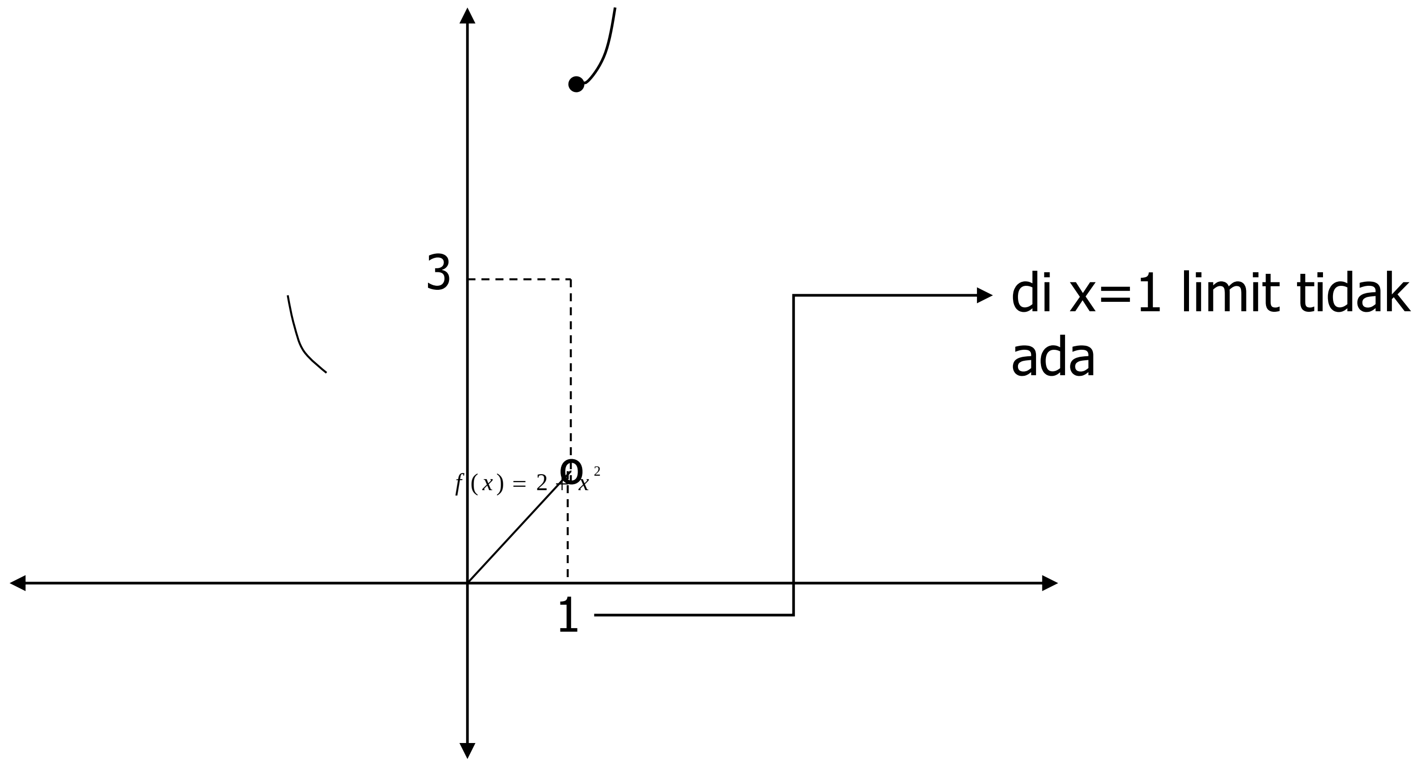
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 2 + x^2 = 3$$

Karena $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \longrightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ Tidak ada

c. Karena aturan fungsi **tidak berubah** di x=2, maka **tidak perlu** dicari kiri dan limit kanan di x=2

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 2 + x^2 = 6$$

d.



Untuk x $\leq$ 0

$$f(x) = x^2$$

Grafik: parabola

Untuk 0<x<1

f(x)=x

Grafik:garis lurus

Untuk $\geq$ 0

Grafik: parabola

2. Tentukan konstanta c agar fungsi

$$f(x)=\begin{cases} 3-cx\,, & x<-1 \\ x^2-c\,, & x\geq -1 \end{cases}$$

mempunyai limit di x=-1

Jawab

Agar f(x) mempunyai limit di x=-1, maka limit kiri harus sama dengan limit kanan

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} 3-cx = 3+c$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} x^2-c = 1-c$$

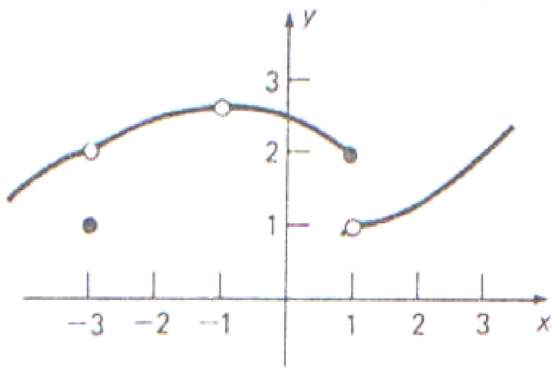
Agar limit ada $\Rightarrow$ 3 + c = 1 - c

$\Downarrow$

C=-1

Soal Latihan

A. Diberikan grafik suatu fungsi *f* seperti gambar berikut .



Cari limit /nilai fungsi berikut, atau nyatakan bahwa limit /nilai fungsi tidak ada.

1. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$
6. f(-3)
7. f(-1)
8. f(1)

Soal Latihan

B.

1. Diketahui : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$

a.Hitung $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

b. Selidiki apakah $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ada, jika ada hitung limitnya

2. Diketahui $g(x) = |x - 2| - 3x$, hitung (bila ada) :

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ c. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

3. Diketahui $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$, hitung (bila ada)

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ c. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Sifat limit fungsi

Misal

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x\to a} g(x) = G$$ (limit dari f , g ada dan berhingga)

maka

1. $$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm G$$

2. $$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = LG$$

3. $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{G}, \; bila \quad G \neq 0$$

4. $$\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$$,n bilangan bulat positif

5. $$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$ bila n genap L harus positif

Prinsip Apit

Misal $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk x disekitar c dan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \text{serta} \quad \lim_{x \to c} h(x) = L$$

maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

Contoh Hitung $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin \dfrac{1}{x-1}$

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} \leq (x-1)^2$$

Karena $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \leq 1 \quad \Rightarrow$

dan

$$\lim_{x \to 1} -(x-1)^2 = 0 \quad , \lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$$

maka

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} = 0$$

Limit Fungsi Trigonometri

$$1.\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2.\ \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$3.\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Contoh

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + \sin 4x}{5x - \tan 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 + \frac{\sin 4x}{4x}.4}{5 - \frac{\tan 2x}{2x}.2} = \frac{3 + \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}.4}{5 - \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{2x}.2}$$

$$= \frac{3 + \lim_{4x \to 0} \frac{\sin 4x}{4x}.4}{5 - \lim_{2x \to 0} \frac{\tan 2x}{2x}.2} = \frac{7}{3}$$

x → 0 ekivalen dgn 4x → 0

Soal Latihan

Hitung

1. $\lim_{t \to 0} \frac{\tan^2 3t}{2t}$

2. $\lim_{t \to 0} \frac{\cot \pi t \sin t}{2 \sec t}$

3. $\lim_{t \to 0} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin t}$

4. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin 3t + 4t}{t \sec t}$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}$

Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Limit Tak Hingga

Misal $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

(i) $+\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

(ii) $-\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

(iii) $+\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

(iv) $-\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

Ctt : g(x) → 0 dari arah atas maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x) positif.

g(x) → 0 dari arah bawah maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x negatif.

Contoh Hitung

a. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1}$ b. $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1}$ c. $\lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{x}{\sin x}$

Jawab

a. $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2+1 = 2 > 0$,g(x)=x-1 akan menuju 0 dari arah bawah, karena x → 1 dari kiri berarti x lebih kecil dari 1, akibatnya x-1 akan bernilai negatif

Sehingga

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$$

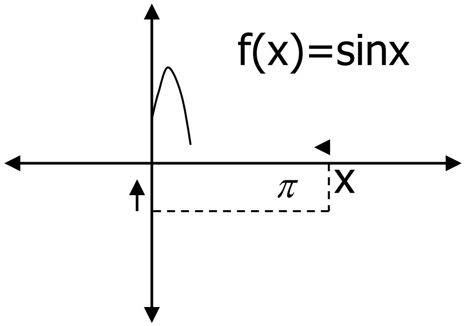
b. $\lim\limits_{x \to -1^-} x^2+1 = 2 > 0$ $g(x) = x^2 - 1$ akan menuju 0 dari arah atas, karena x → -1 dari kiri berarti x lebih kecil dari -1, tapi bilangan negatif yang lebih kecil dari -1 jika dikuadr kan lebih besar dari 1 sehingga x^2-1 bernilai positi

Sehingga

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

c. Karena

$$\lim_{x \to \pi^+} x = \pi > 0$$ dan



Jika x menuju π dari arah kanan maka nilai sinx menuju 0 dari arah bawah(arah nilai sinx negatif)

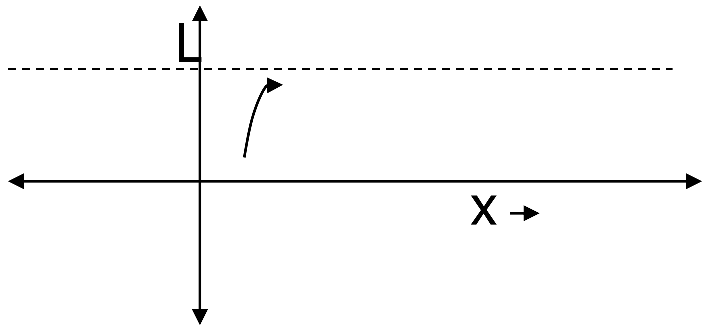
sehingga

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{x}{\sin x} = -\infty$$

Limit di Tak Hingga

a. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau f(x) mendekati L jika x menuju tak hingga



Contoh Hitung

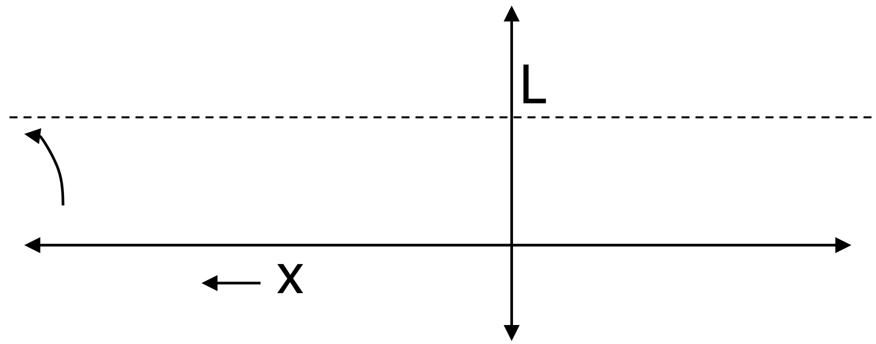
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = 1/2$$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M < 0 \ \ni \ x < M \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$

atau f(x) mendekati L jika x menuju minus tak hingga



Contoh Hitung

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 5}{2x^2 + 4}$$

Jawab

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 5}{2x^2 + 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{\left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = 0$$

Contoh Hitung

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} + x$$

Jawab :

Jika x → ∞ , limit diatas adalah bentuk ($\infty - \infty$)

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} + x = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 3} + x \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - x}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x} \right)$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = | x |}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 3} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{\sqrt{x^2 (1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{- x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{- (\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1)} = -\frac{1}{2}$$

Soal Latihan

Hitung

1. $\lim_{x \to 3^+} \frac{3+x}{3-x}$

2. $\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x^2-4}$

3. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$

4. $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x^2}$

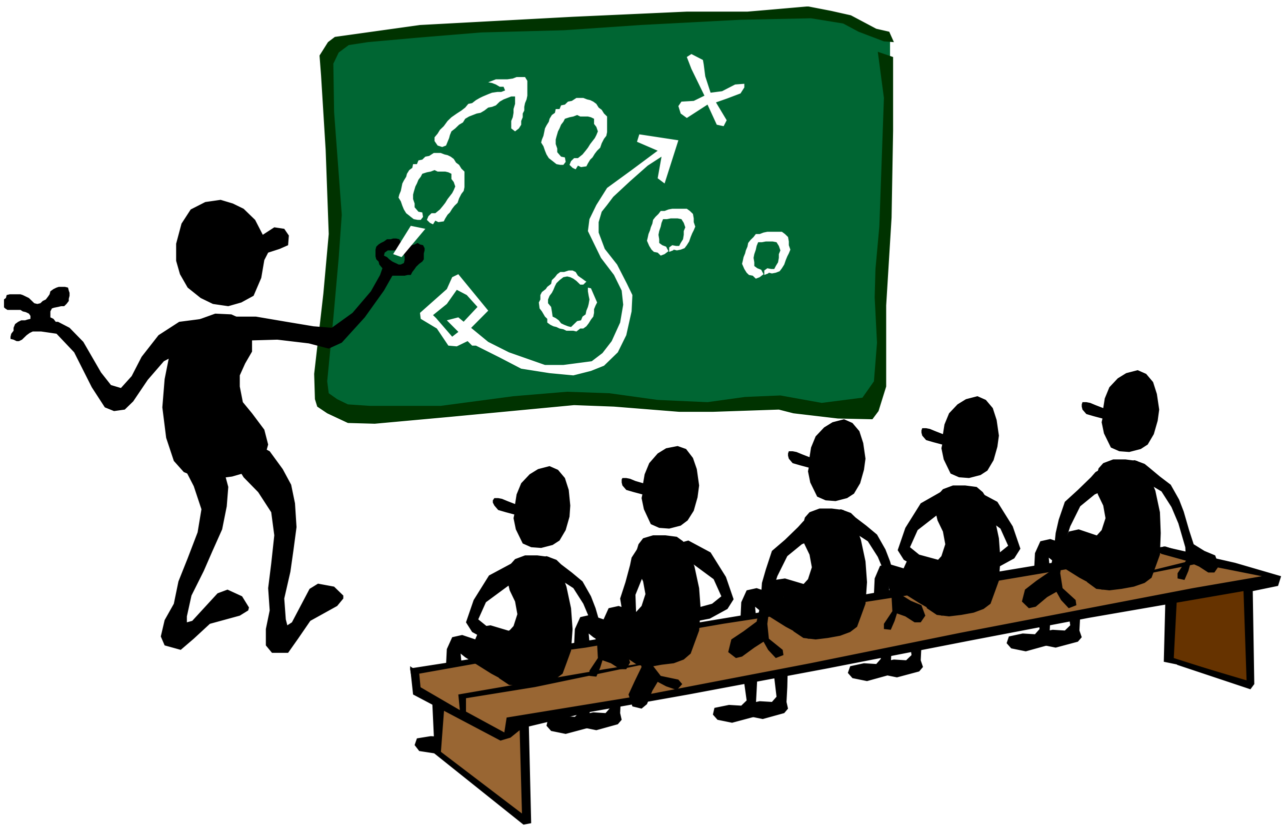
5. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x}{x+1}$

6. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

Contoh

- $f(x) = x^2$, $x = 3$ maka $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$
- $f(x)$ ditentukan sebagai fungsi berikut :
  $f(x) = [x] =$ (bilangan asli terbesar dalam x)
  Misal $x_0 = 3$, jika didekati dari kanan nilai limitnya 3, jika didekati dari kiri nilai limitnya 2. Karena limit kiri dan kanan tidak sama, maka limit di titik $x = 3$ tidak ada.
  Dengan kata lain terjadi diskontinyu di titik $x = 3$.

Kontinuitas



Kontinuitas

- Fungsi f(x) adalah kontinu di titik $x = x_0$ jika limit kiri dan limit kanan dari f(x) adalah sama.
- Fungsi f(x) adalah kontinu di titik $x = x_0$, bila untuk setiap $h > 0$ dapat dicari bilangan positif δ sedemikian hingga $|f(x) - f(x_0)| < h$ untuk $|x - x_0| < \delta$ atau $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.