DIFERENSIAL (Turunan)

Ira Prasetyanigrum

Turunan Fungsi Aljabar

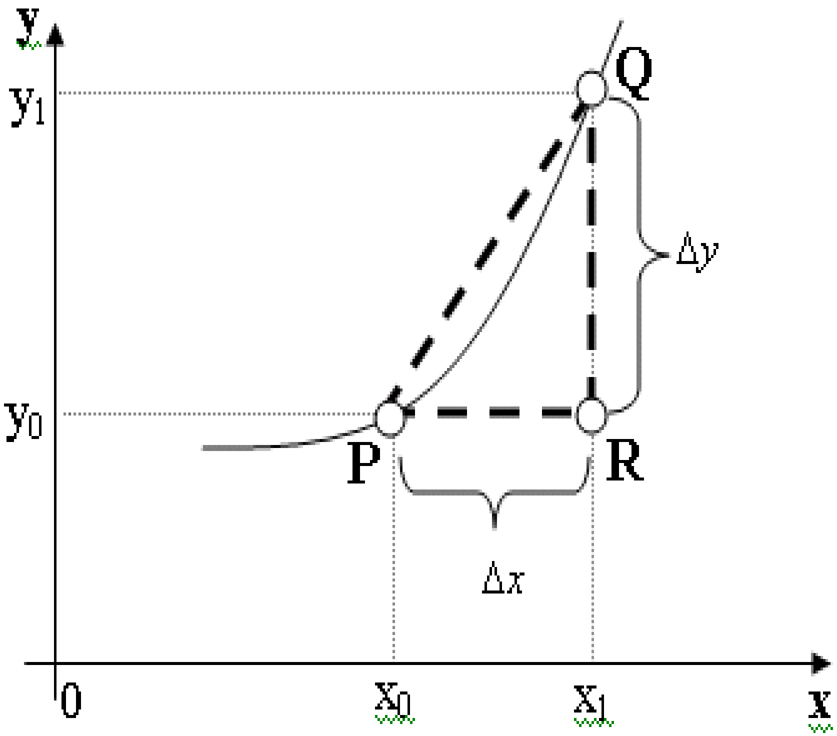
Definisi : Jika y = f(x) adalah suatu fungsi variable x, dan jika

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$, berarti :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ ada dan terbatas

Maka limit tersebut dinamakan turunan dari y terhadap x dan f(x) dikatakan fungsi dari x yang dapat diturunkan (*differentiable*).

Secara Geometri



P(x0,y0) dan Q(x1,y1) terletak di y = f(x)

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$\overrightarrow{PR} : \Delta x = x_1 - x_0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$\overrightarrow{QR} : \Delta y = y_1 - y_0$$

Tanjakan (koefisien arah/slope) : garis yang menghubungkan titik P dan Q :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Untuk $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{Q \rightarrow P} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Turunan Baku

$y = f(x)$	$y' = {}^{dy}\!/_{dx}$	$y = f(x)$	$y' = {}^{dy}\!/_{dx}$
x^n	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\tan x$	$\sec^2 x$
e^{kx}	ke^{kx}	$\cot x$	$-c\sec^2 x$
a^x	$a^x \ln a$	$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\ln a$	${}^1\!/_x$	$c\sec x$	$-c\sec x \cot x$
$\log_a x$	${}^1\!/_x \ln a$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$\cos x$	$\cosh x$	$\sinh x$

Fungsi dari Suatu Fungsi

Pandang : $y = \cos(5x - 4)$ **, y adalah fungsi sudut (5x – 4)**

dan (5x – 4) adalah fungsi dari x.

Maka $\frac{dy}{dx} = \ldots$

Misalkan u = 5x – 4

Jadi y = cos u → $\frac{dy}{du} = -\sin u = -\sin(5x - 4)$

Gunakan hubungan : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

Jika u = 5x – 4 → $\frac{du}{dx} = 5$

Sehingga : $\frac{d}{dx}\{\cos(5x - 4)\} = -\sin(5x - 4)(5) = -5\sin(5x - 4)$

Perkalian & Pembagian

Jika y = u.v , dengan u dan v adalah fungsi x.

Maka : $$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

Jika y = $\frac{u}{v}$ **, dengan u dan v adalah fungsi x.**

Maka : $$\frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Contoh

1. $y = x^3 \sin 3x$

$$\frac{dy}{dx} = x^3(3\cos 3x) + 3x^2(\sin 3x) = 3x^2(x\cos 3x + \sin 3x)$$

2. $y = e^{2x} \ln 5x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}(\frac{1}{5x})(5) + 2e^{2x}\ln 5x = e^{2x}(\frac{1}{x} + 2\ln 5x)$$

3. $y = \frac{\ln x}{e^{2x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}(\frac{1}{x}) - \ln x(2e^{2x})}{e^{4x}} = e^{-2x}(\frac{1}{x} - 2\ln x)$$

4. $y = \frac{\sin 3x}{x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(3\cos 3x) - \sin 3x(1)}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1)\cos 3x - \sin 3x}{(x+1)^2}$$

- Bagaimana jika fungsinya lebih dari dua?
- Contoh :
  - y = uvw
  - y = uv/w
  - y = u/vw
  - y = tu/vw
  - Dll.

  di mana t, u, v, w adalah fungsi dalam x.
- Solusi : memakai turunan logaritmik (natural)

Contoh

$$y = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}$$

$$\ln y = \ln x^2 + \ln \sin x - \ln \cos 2x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) + \frac{1}{\sin x}(\cos x) - \frac{1}{\cos 2x}(-2\sin 2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}\{\frac{2}{x} + c\tan x + 2\tan 2x\}$$

Soal-soal :

1. $y = x^4 e^{3x} \tan x$

2. $y = \dfrac{e^{4x}}{x^3 \cosh 2x}$

3. $y = \dfrac{e^{4x}}{x^3 \cosh 2x}$

4. $y = x^3 \sin 2x \cos 4x$

Soal-soal Terapan

1. Persamaan lintasan suatu partikel : $S = 2t^2 + 3t + 5$, s (cm) dan t (detik)
   Hitung kecepatan rata-rata dalam interval t = 1 s/d 5.

2. Jika $S = t^3 - 9t^2 + 15t - 7$
   Tentukan harga S dan V jika a = 0. Untuk harga-harga t yang manakah $v < 0$?

3. Sebuah tangki minyak akan dikosongkan isinya. Q menyatakan banyaknya minyak dalam tangki (gallon) pada saat t (menit) dan Q = 67500 – 9000t + 300t2. Berapa gallon per menit kecepatan minyak mengalir keluar pada saat t = 0ada saat 1 menit sebelum minyak dalam tangki habis.

Fungsi Implisit

- Jika y terdefinisi sepenuhnya oleh x maka y disebut fungsi eksplisit dari x.
  - Contoh :
    - $y = x^4 - 3x^2 + 1$
    - $Y = 3x^2 + \cos x$
- Kadang tidak dapat/tidak perlu y dipisah sendiri, maka y disebut fungsi implisit dari x.
  - Contoh :
    - $y = xy + \sin y - 2$
    - $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$

Contoh :

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ dari $x^2 + y^2 = 25$

   Bentuk tersebut dideferensialkan terhadap x :

   $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $\quad 2y\frac{dy}{dx} = -2x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$

2. Cari $\frac{dy}{dx}$ dari $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$

   $$2x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

   $$(2x + 6y)\frac{dy}{dx} = -(2x + 2y)$$

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + 2y)}{(2x + 6y)} = \frac{-(x + y)}{(x + 3y)}$$

Soal-soal Campuran

1. Turunkan terhadap x :

   a. $\ln(\sec x + \tan x)$ b. $\sin^4 x \cos^3 x$

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika :

   a. $y = \frac{x \sin x}{1 + \cos x}$ b. $y = \ln\left\{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right\}$

3. Jika $(x - y)^3 = A(x + y)$, buktikan $(2x + y)\frac{dy}{dx} = x + 2y$

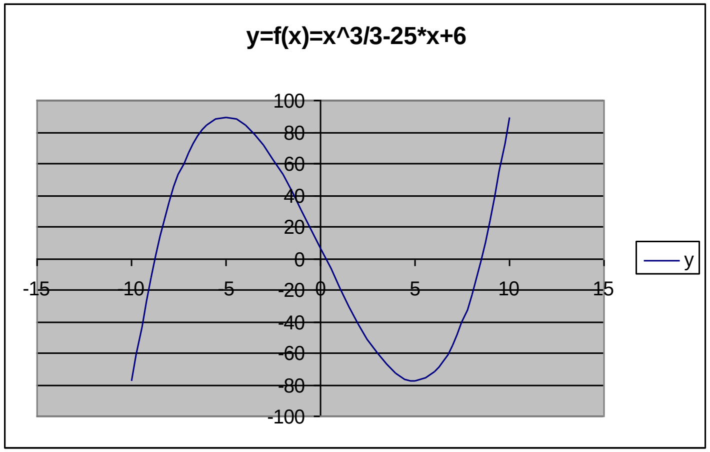
4. Jika $x^2 - xy + y^2 = 7$, tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ di titik (4,5).

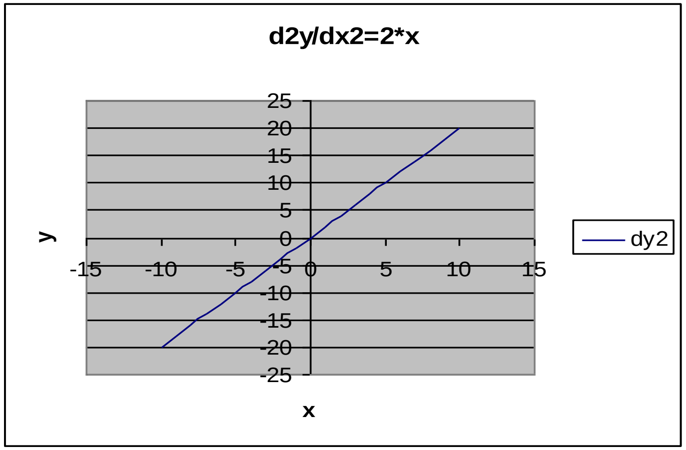
5. Jika $x = \ln tg\frac{\theta}{2}$, $y = tg\theta - \theta$. Buktikan : $\frac{d^2y}{dx^2} = \tan^2\theta \sin\theta(\cos\theta + 2\sec\theta)$

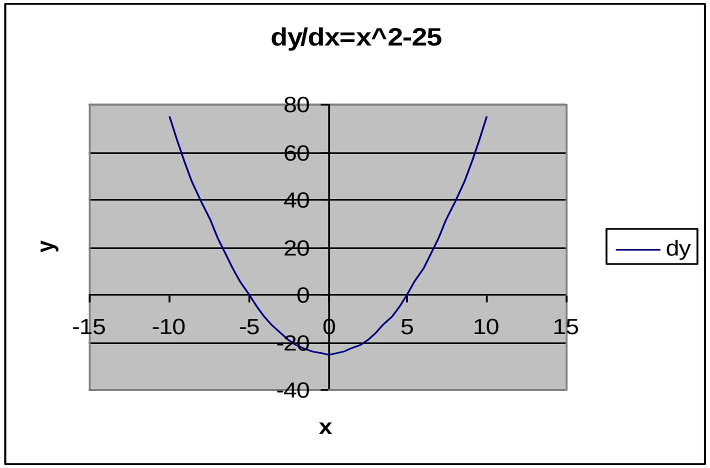
Titik Balik (maks/Min)

- Macam-macam :
  - Titik maksimum
  - Titik minimum
  - Titik belok
- Titik balik : turunan pertama = nol
- Turunan kedua :
  - Negatif → titik maksimum
  - Positif → titik minimum
  - Nol → titik belok

Ilustrasi







Titik Balik : $\frac{dy}{dx} = 0$

$x^2 - 25 = 0 \rightarrow (x+5)(x-5)$

x = -5 atau x = 5 (titik balik)

Di titik tersebut maksimum/minimum/belok?

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(x=-5)} = 2x = 2(-5) = -10 \rightarrow$ titik maksimum

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(x=5)} = 2x = 2(5) = 10 \rightarrow$ titik minimum

Soal cerita

1. Jangkauan sinyal suatu kabel bawah laut sebanding dengan $r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right)$ dengan r adalah perbandingan jari-jari konduktor dengan jari-jari kabel. Tentukan r agar jangkauan maksimum.
2. Daya yang disalurkan oleh ban kemudi sebanding dengan $Tv - \frac{wv^3}{g}$ dengan v adalah laju ban, T adalah tegangan sisi kemudi, dan w adalah berat tiap satuan panjang ban. Tentukan laju ban agar daya yang disalurkan maksimum.
3. Suatu kerucut lingkaran tegak memiliki luas selimut permukaan tertentu, A. Tunjukkan jika volume maksimum, maka perbandingan tinggi dengan jari-jari lingkaran alas $\sqrt{2}$: 1.
4. Kecepatan (v) suatu piston berhubungan dengan kecepatan sudut (ω) suatu pemutar melalui persamaan $v = \omega r\left\{\sin\theta + \frac{r}{2l}\sin 2\theta\right\}$

   r = panjang pemutar

   l : panjang batang penghubung

   Untuk l = 4r, tentukan harga θ positif pertama yang memberikan Vmaks.

Turunan Parsial

- Misal $z = f(x,y) = x^2-4xy+y^3$
  - Variabel x dan y merupakan fungsi dari variabel z
  - Variabel z bergantung pada variabel x dan y
  - Variabel z dipengaruhi oleh variabel x dan y
- Bagaimana perubahan z terhadap x jika y konstan?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y$$

- Bagaimana perubahan z terhadap y jika x konstan?

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x + 3y^2$$

- Bagaimana perubahan z thd y, kemudian thd x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-4x + 3y^2\right) = -4$$

Soal-soal

- Tentukan $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial z}, \dfrac{d^2 w}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \dfrac{d^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$

$$w = \frac{(x^2 - 4xy)}{z^3}$$

$$w = \frac{(x^2 - 4xy^2)^3}{z^3}$$

$$w = \frac{(x^2 - \frac{4xy^2}{z})^3 (3x + 2yz)}{yz^3}$$

- Tentukan nilai a dan b berdasarkan informasi data sampel berpasangan (x,y).

$$E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$