Teknik Informatika - PENS

ALJABAR LINIER

PERTEMUAN 5-6

Matriks & Operasinya

Matriks:

1. **Suatu kumpulan nilai bentuk empat-persegi-panjang**
2. **Terdiri dari baris-baris dan kolom-kolom**
3. **Tiap nilai dalam matriks disebut entri; cara menyebutkan entri adalah dengan subskrip / indeks (baris, kolom)**

Contoh:

Matriks A = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **semua entri:** ***real***

Matriks A terdiri dari 2 baris dan 3 kolom

$A_{1,1} = 1$ $A_{1,2} = 5$ $A_{1,3} = 9$

$A_{2,1} = 7$ $A_{2,2} = 3$ $A_{2,3} = 0$

- **Matrix dan Operasi Matrix**

- Huruf besar menyatakan ➔ matrix
- Huruf kecil menyatakan ➔ entry = skalar = kuantitas numerik
- a_{ij} = entry yang terdapat pada baris ke i dan kolom ke j dari A
- Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Definisi-definisi:

1. Matriks A = matriks B jika jumlah baris A = baris B dan jumlah kolom A = kolom B sama; dan entri $A_{i,j}$ = entri $B_{i,j}$

2. $C = A \pm B$, maka $C_{i,j} = A_{i,j} \pm B_{i,j}$

3. M = cA (c = *real* / skalar), maka $M_{i,j} = cA_{i,j}$

4. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah matriks-matriks berukuran sama, dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah bilangan-bilangan skalar, maka $c_1 A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n$ disebut kombinasi linier dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dengan koefisien $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

5. Suatu matriks dapat di-partisi menjadi beberapa submatriks dengan “menarik” garis horisontal dan/atau garis vertikal.

   Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_{11} & A_{21} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} A_{21} & A_{22} \end{array} \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{array}$$

Definisi-definisi (lanjutan):

6. **Matriks A dikalikan dengan matriks B; syaratnya adalah banyaknya kolom A = banyaknya baris B.**

   Catatan: perhatikan bahwa perkalian matriks (kedua matriks bujursangkar dengan ukuran sama) tidak komutatif (AB ≠ BA)

   Contoh: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

   $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

   kesimpulan : AB ≠ BA

7. **Transpos(A) = matriks A dengan baris-kolom ditukar tempatnya**

8. **Trace(A) = jumlah semua entri diagonal A = $A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}$**

Sifat perkalian matriks:

A : matriks bujur sangkar, maka

1. $(A^r)(A^s) = A^{(r+s)}$
2. $(A^r)^s = A^{(rs)}$

<u>Sifat-sifat matriks transpos:</u>

1. $(A^T)^T = A$
2. $(kA)^T = k\,(A^T)$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Matriks-matriks khusus:

1. **Matriks O = matriks nol; semua entrinya nol**
2. **Matriks I_n = matriks identitas berukuran (n x n);**

   semua entri diagonalnya = 1, entri lain = 0
3. **Matriks (vektor) baris adalah matriks dengan 1 baris.**
4. **Matriks (vektor) kolom adalah matriks dengan 1 kolom.**

Teorema: **A, B, C merepresentasikan matriks**

a, b merepresentasikan bilangan skalar

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
5. $(B \pm C)A = BA \pm CA$
6. $a(B \pm C) = aB \pm aC$
7. $(a \pm b)C = aC \pm bC$
8. $a(bC) = (ab)C$
9. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

<u>Teorema:</u> **A, O merepresentasikan matriks**

O adalah matriks nol (semua entrinya = nol)

1. **A + O = O + A = A**
2. **A – A = O**
3. **O – A = – A**
4. **AO = O; OA = O**

Example 2 page 40:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Then

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and } BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Thus

- $(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

- And $A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

- So (AB)C= A(BC),as guaranted by theorem 1.4.1c

Matriks Invers

<u>Invers dari sebuah matriks:</u>

A adalah matriks bujur sangkar

Jika AB = BA = I maka B adalah invers dari A dan A adalah invers dari B. (invers matriks A dinotasikan dengan A^{-1})

Jika B invers dari A dan C juga invers dari A maka B = C

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dan $D = ad - bc \neq 0$, maka invers A dapat dihitung dengan

$$A^{-1} = (1/D) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat matriks Invers:

Matriks A, B adalah matriks-matriks invertibel

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. A^n invertibel dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
3. (kA) adalah matriks invertibel dan $(kA)^{-1} = (1/k)\,A^{-1}$
4. A^T invertibel dan $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. A dan B keduanya matriks invertibel, maka AB invertibel dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Metode untuk mencari A^{-1}

If A nxn, maka pernyataan berikut ekuivalen, yaitu semua benar or semua salah :

1. **A dapat dibalik**
2. **$A.x = 0$ hanya mempunyai pemecahan trivial**
3. **A ekuivalen baris terhadap In → dengan melakukan OBE pada A, A dapat dirubah menjadi Matrix Identikan (In)**

<u>Algoritma untuk mencari invers sebuah matriks A (n x n)</u>

ubah menjadi matrix identitas dengan menggunakan OBE.

<u>Contoh:</u>

$$\boxed{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{array}}_{\text{matriks A}} \;\vdots\; \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\text{matriks identitas I}}}$$

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{matrix}}^{\textbf{matriks A}}\ \middle|\ \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right)$$

dengan OBE dihasilkan

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{matrix}}_{\textbf{invers A}}\right)$$

$$\overbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{matrix}}^{\textbf{matriks A}} \quad \Bigg\vdots \quad \overbrace{\begin{matrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{matrix}}^{\textbf{invers A}}$$

jika kedua matriks ini dikalikan, akan didapat

$$\begin{pmatrix} -40+26+15 & 16-10-6 & 9-6-3\\ -80+65+15 & 32-25-6 & 18-15-3\\ -40+0+40 & 16-0-16 & 9-0-8 \end{pmatrix}$$

Step by step mencari matrix invers

Example 4 hal 55

Find the invers of $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Baris ke-1 dikalikan (-2)+baris ke-2
Baris ke-1 dikalikan (-1)+baris ke-3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Baris ke-2 dikalikan 2 + baris ke-3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Baris ke-3 dikalikan dengan (-1)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Baris ke-3 dikalikan (3)+baris ke-2
Baris ke-3 dikalikan (-3) + baris ke-1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

baris ke-2 dikalikan (-2) + baris ke-1

Thus,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Example 7 page 44

Consider the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Applying the formula in theorem 1.4.5,we obtain

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

therefore $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, as guaranteed by theorem 1.4.6

Example 8 page 44

Let A and A^{-1} be as example 7, that is

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Then

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n}$$

Example 9 page 44

If $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ and $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 4I = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Example 10 page 44

Consider the matrices

$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ and $A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Applying Theorem 1.4.5 yields

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ $(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

As guaranteed by Theorem 1.4.10, these matrices satisfy (4)

- **Matrix yang tidak dapat dibalik : Jika pada suatu tahap muncul baris bilangan nol pada ruas kiri → maka hentikan perhitungan**
- **Example 5 halaman 56**

Consider the matrix :

A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Gunakan prosedur pada example 4:**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Baris ke-1 dikalikan (-2) + baris ke-2
Baris ke-1 ditambahkan ke baris ke-3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Tambahkan baris ke-2 ke baris ke-3

Aplikasi:

jika A = matrix (nxn) yang punya invers (invertible / dapat dibalik), maka dalam sebuah Sistem Persamaan Linier:

$$Ax = B \rightarrow x = A^{-1}B$$

Contoh :

dalam mendapatkan solusi dari Sistem Persamaan Linier

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 \qquad + 8x_3 = 1$$

matriks A berisi koefisien-koefisien dari x_1, x_2, x_3

vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ yang dicari

vektor $B = (1, 1, 1)^T$

Contoh:

Akan dicari solusi dari Ax = b, di mana

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solusi dari Ax = b adalah **x** sbb.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Cek:</u> apakah benar A**x** = **b** ?

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-15 + 10 + 6} \\ \mathbf{-30 + 25 + 6} \\ \mathbf{-15 + 0 + 16} \end{pmatrix}$$

Matrix invers

if A= matrix n x n yang dapat dibalik, maka :

$$A.x = B \rightarrow x = A^{-1}.B$$

Contoh :

Persamaan linear :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Contoh :

Persamaan linear :

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\
x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 17
\end{aligned}
$$

Dalam matrix A.x = B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka $x = A^{-1} B$

$$= \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

pecahkan sistem persamaan linear berikut

a) $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 4$

$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 5$

$X_1 \quad + 8X_3 = 9$

b) $X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1$

$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 6$

$X_1 \quad + 8X_3 = -6$

Cara mencari :

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}$$

Gauss Jordan $\Downarrow$

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

jawaban a) $X_1=1$, $X_2=0$, $X_3=1$

jawaban b) $X_1=2$, $X_2=1$, $X_3=-1$

TEORI MATRIX

- Penjumlahan : Ukuran matrix harus sama.
- Perkalian matrix : $A_{2x3} \times B_{3x4} = C_{2x4}$

  sama

  hasil

- Transpos : $A \rightarrow A^t$

  # Contoh : $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = [\ 2 \quad 3\ ]$

- Contoh soal :

  Persamaan :

$$\begin{aligned} x + \ y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \rightarrow$$

matrix yang diperbesar :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

TEORI MATRIX

Persamaan matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \quad . \quad X = B$$

x dicari hasilnya.

- Penyelesaian persamaan linier :
  - Cara biasa
  - Gauss
  - Gauss – Jordan
  - Invers matrix
  - OBE (Operasi Baris Elementer)

Matrix Products as Linear Combinations

- Row and coloumn matrices provide an alternative way of thinking about multiplication. For the example, suppose that :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Kemudian :

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots.. + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Example 8 : The matrix product.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Can be written as the linear combination :

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks dengan bentuk khusus

Bab 1.7

Matriks A(n × n) bujur sangkar, artinya banyaknya baris A sama dengan banyaknya kolom A.

Bentuk-bentuk khusus sebuah matriks bujur sangkar a. l. :

1. **Matriks diagonal D**
2. **Matriks segi-3 atas**
3. **Matriks segi-3 bawah**
4. **Matriks simetrik**

1. Matriks diagonal D: $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{d_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{d_3} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{d_n} \end{pmatrix}$$

2. Matriks segi-3 atas: $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Matriks segi-3 bawah: $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

4. Matriks simetrik: $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema:

1. Transpos dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 atas; transpos dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 bawah.
2. Perkalian dua matriks segi-3 bawah menghasilkan matriks segi-3 bawah; perkalian dua matriks segi-3 atas menghasilkan matriks segi-3 atas.
3. Matriks segi-3 invertibel jika dan hanya jika semua entri diagonalnya tidak nol.
4. Invers dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 bawah.
5. Invers dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 atas.

Teorema:

A dan B matriks simetrik, k adalah skalar

6. A^T simetrik
7. A + B simetrik dan A – B simetrik
8. Matriks kA simetrik
9. Jika A invertibel, maka A^{-1} simetrik

Teorema:

10. Jika A matriks invertibel, maka AA^T dan A^TA juga invertibel.

PR

- 1.3 ➔ 3.g 3.k 4.g 4.h 6.e 13.b 14.a
- 1.4 ➔ 2.b 3.c 7.b 7.d 9.c
- 1.5 ➔ 7.b 7.c
- 1.6 ➔ 6 8 9.b 9.c 14 18

DAFTAR PUSTAKA

- Elementary Linear Algebra 7th edition, Howard Anton – Chris Rorre, John Wiley & Sons Inc., 1994