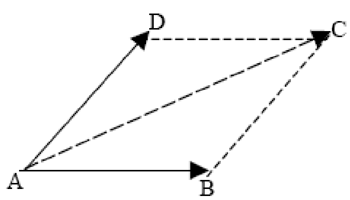
BAB IV
Vektor– Vektor di bidang dan di ruang

IV.1 Pendahuluan

Definisi

Vektor didefinisikan sebagai besaran yang memiliki arah. Kecepatan, gaya dan pergeseran merupakan contoh – contoh dari vektor karena semuanya memiliki besar dan arah walaupun untuk kecepatan arahnya hanya positif dan negatif.
Vektor dikatakan berada di ruang – n (R^n) jika vektor tersebut mengandung n komponen. Jika vektor bearada di R^2 maka dikatakan vektor berada di bidang, sedangkan jika vektor berada di R^3 maka dikatakan vektor berada di ruang.
Secara geometris, di bidang dan di ruang vektor merupakan segmen garis berarah yang memiliki titik awal dan titik akhir. Vektor biasa dinotasikan dengan huruf kecil tebal atau huruf kecil dengan ruas garis

Contoh 4.1.1



Dari gambar diatas terlihat beberapa segmen garis berarah (vektor) seperti $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{AD}$ dengan A disebut sebagai **titik awal** , sedangkan titik B, C dan D disebut **titik akhir**.
Vektor posisi didefinisikan sebagai vektor yang memiliki titik awal O (untuk vektor di bidang , titik O adalah (0,0)).

IV.2 Operasi – operasi pada vektor

A. Penjumlahan dua vektor

Misalkan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor – vektor yang berada di ruang yang sama , maka vektor ($\bar{u}$ + $\bar{v}$) didefinisikan sebagai vektor yang titik awalnya = titik awal $\bar{u}$ dan titik akhirnya = titik akhir $\bar{v}$.

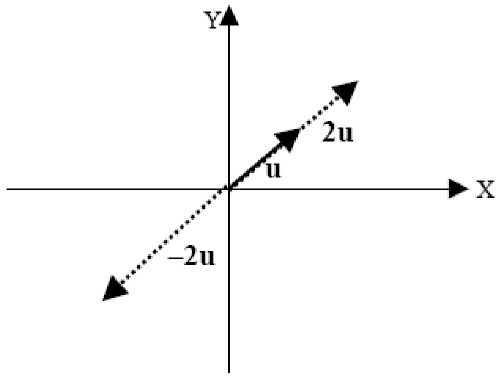
Contoh 4.2.1

Perhatikan gambar pada contoh 4.1.1 . Misalkan $\bar{u} = \overrightarrow{AB}$ dan $\bar{v} = \overrightarrow{BC}$, jika vektor $\bar{w}$ didefinisikan sebagai $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$, maka $\bar{w}$ akan memiliki titik awal = A dan titik akhir = C, jadi w merupakan segmen garis berarah $\overrightarrow{AC}$.

B. Perkalian vektor dengan skalar

Vektor nol didefinisikan sebagai vektor yang memiliki panjang = 0. Misalkan $\bar{u}$ vektor tak nol dan k adalah skalar , $k \in R$. Perkalian vektor $\bar{u}$ dengan skalar

k , $k\bar{u}$ didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya $\|\bar{u}\|$ kali panjang $\bar{u}$ dengan arah :
Jika $k > 0 \rightarrow$ searah dengan $\bar{u}$
Jika $k < 0 \rightarrow$ berlawanan arah dengan $\bar{u}$
Contoh 4.2.2



C. Perhitungan vektor

Diketahui a dan b vektor–vektor di ruang yang komponen – komponennya adalah $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Maka

$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

$k \cdot \bar{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$

Jika $\bar{c} = AB$ kemudian titik koordinat $A = (a_1, a_2, a_3)$ dan $B = (b_1, b_2, b_3)$ maka

$\bar{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

IV.3 Hasil kali titik , panjang vektor dan jarak antara dua vektor

Hasil kali titik dua vektor jika diketahui komponennya

Diketahui $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, Hasil kali titik antara vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ didefinisikan sebagai :

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1.b_1) + (a_2.b_2) + (a_3.b_3)$

Hasil kali titik dua vektor jika diketahui panjang vektor dan sudut antara dua vektor

Diketahui $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ dua buah vektor yang memiliki panjang berturut – turut $\|\bar{a}\|$ dan $\|\bar{b}\|$ sedangkan sudut yang dibentuk oleh kedua vektor adalah ϕ, sudut ϕ ini terbentuk dengan cara menggambarkan kedua vektor pada titik awal yang sama.

Hasil kali titik antara vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ didefinisikan sebagai :

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \|a\| \, \|b\| \cos\phi$, $\phi \in [0, \pi]$

Jadi hasil kali titik dua buah vektor berupa skalar.
Dengan mengetahui besarnya ϕ , akan diketahui apakah hasil kali titik akan bernilai positif atau negatif

$\bar{a}\,.\,\bar{b} > 0 \quad \leftrightarrow \quad \phi$ lancip , $0 \le \phi < 90°$

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \phi = 90°$, $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ saling tegak lurus

$\bar{a}\,.\,\bar{b} < 0 \quad \leftrightarrow \quad \phi$ tumpul, $90° < \phi \le 180°$

Contoh 4.3.1
Diketahui $\bar{a} = (1, -3)$ dan $\bar{b} = (3k, -1)$
Tentukan nilai k agar $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ saling tegak lurus !
Jawab
Agar $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ saling tegak lurus, maka haruslah $\bar{a}\,.\,\bar{b} = 0$

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = 3k + 3 = 0 \rightarrow k = -1$

Panjang (norm) vektor dan jarak antara dua vektor
Panjang vektor
Dengan menggunakan operasi hasil kali titik jika diketahui komponen $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ didapatkan bahwa

$\bar{a}\,.\,\bar{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad \ldots(1)$

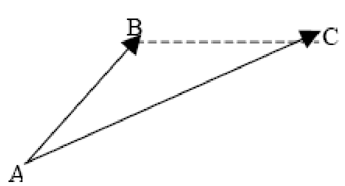
Dari definisi hasil kali titik lainnya , didapatkan bahwa
$\bar{a}\,.\,\bar{a} = \|\bar{a}\|\;\|\bar{a}\|\;\cos 0 \quad \ldots.(2)$, dalam hal ini sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{a}$ pastilah bernilai 0 karena keduanya saling berhimpit.
Dari persamaan 1 dan 2 , didapatkan persamaan berikut :

$$\|\bar{a}\|^2 = \bar{a}\,.\,\bar{a} \rightarrow \|\bar{a}\| = (\bar{a}\,.\,\bar{a})^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Jarak antara dua vektor
Jarak antara vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ didefinisikan sebagai panjang dari vektor $(\bar{a} - \bar{b})$ dan biasa dinotasikan dengan d $(\bar{a}\,,\bar{b})$.

$$d(\bar{a}\,,\bar{b}) = (\bar{a} - \bar{b}\;\,.\;\bar{a} - \bar{b}\,)^{1/2} = \sqrt{(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + (a_3^2 - b_3^2)}$$

Secara geometris , dapat digambarkan seperti berikut ini :



Misalkan $\bar{a} = \overrightarrow{AC}$ dan $\bar{b} = \overrightarrow{AB}$, maka jarak antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ merupakan panjang dari ruas garis berarah $\overrightarrow{BC}$

Contoh 4.3.2
Diketahui $\bar{u} = (2, -1, 1)$ dan $\bar{v} = (1, 1, 2)$
Tentukan besar sudut yang dibentuk oleh $\bar{u}$ dan $\bar{v}$!

Jawab

$\overline{u}\,.\,\overline{v} = 2 - 1 + 2 = 3$

$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \quad = \sqrt{6}$

$\cos\theta = \dfrac{u.v}{\|u\|\,\|v\|} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \phi = 60°$

Jadi sudut yang dibentuk antara $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ adalah $60°$

Beberapa sifat yang berlaku dalam hasil kali titik

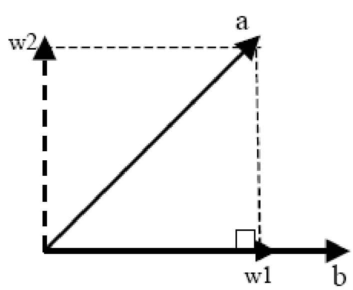
a. $\overline{a}\,.\,\overline{b} = \overline{b}\,.\,\overline{a}$

b. $\overline{a}\,.\,(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\,.\,\overline{b} + \overline{a}\,.\,\overline{c}$

c. $m\,(\overline{a}\,.\,\overline{b}) = (m\,\overline{a})\,.\,\overline{b} = \overline{a}\,.\,(m\overline{b}) = (\overline{a}\,.\,\overline{b})\,m$

IV.4 Proyeksi orthogonal

Diketahui vektor $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ adalah vektor – vektor pada ruang yang sama seperti terlihat pada gambar dibawah ini :



Vektor $\overline{a}$ disusun dari dua vektor yang saling tegak lurus yaitu $\overline{w}_1$ dan $\overline{w}_2$, jadi dapat dituliskan $\overline{a} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$,Dari proses pembentukannya $\overline{w}_1$ juga disebut sebagai vektor proyeksi orthogonal $\overline{a}$ terhadap $\overline{b}$ karena merupakan hasil proyeksi secara orthogonal vektor $\overline{a}$ terhadap $\overline{b}$, sedangkan $\overline{w}_2$ disebut sebagai komponen dari a yang tegak lurus terhadap $\overline{b}$.

Karena $\overline{w}_1$ merupakan hasil proyeksi di $\overline{b}$ maka dapat dituliskan $\overline{w}_1 = k\overline{b}$, nilai k ini akan menentukan arah dan panjang dari $\overline{w}_1$. Jika sudut antara $\overline{a}$ dan $\overline{b}$ adalah tumpul , maka tentunya nilai k akan negatif ini juga berarti arah $\overline{w}_1$ akan berlawanan dengan arah $\overline{b}$.

Menghitung $\overline{w}_1$

Untuk menghitung $\overline{w}_1$, harus dihitung terlebih dahulu nilai k. Dengan menggunakan aturan hasil kali titik , diperoleh :

$\overline{a}\,.\,\overline{b} = (\overline{w}_1 + \overline{w}_2)\,.\,\overline{b}$

$= \ \overline{w}_1 \ . \ \overline{b}$ (karena $\overline{w}_2$ dan $\overline{b}$ saling tegak lurus maka $\overline{w}_2 \ . \ \overline{b} = 0$)

$= \ \|\overline{w}_1\| \ \|\overline{b}\| \ \cos\theta$

$= \ \|k\,\overline{b}\| \ \|\overline{b}\| \ \cos 0$ (sudut yang dibentuk adalah 0 atau 180)

$= \ k \ \|b\|^2$

Jadi $k = \dfrac{\overline{a}.\overline{b}}{\|b\|^2}$

$\overline{w}_1 = k\ \overline{b} \ = \dfrac{\overline{a}.\overline{b}}{\|b\|^2}\ \overline{b}$ dan $\overline{w}_2 \ = \overline{a} - \overline{w}_1$

Panjang dari $\overline{w}_1$ adalah $\dfrac{\overline{a}.\overline{b}}{\|b\|}$

Contoh 4.4.1

Diketahui $\overline{a} = (4,1,3)$ dan $\overline{b} = (4,2,-2)$

Tentukan

a. Vektor proyeksi tegak lurus dari $\overline{a}$ terhadap $\overline{b}$!

b. Panjang dari vektor proyeksi tersebut !

c. Komponen dari $\overline{a}$ yang tegak lurus terhadap $\overline{b}$!

Jawab

a. Misalkan $\overline{w}_1$ adalah vektor proyeksi tegak lurus dari $\overline{a}$ terhadap $\overline{b}$, maka

$\overline{w}_1 = k\ \overline{b}$ sedangkan $k = \dfrac{\overline{a}.\overline{b}}{\|b\|^2} = \dfrac{(4.4 + 1.2 + 3.-2)}{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$

Jadi $\overline{w}_1 = ½ (4,2,-2) = (2,1,-1)$

b. Panjang $\overline{w}_1$ adalah $\dfrac{\overline{a}.\overline{b}}{\|b\|} = \dfrac{12}{\sqrt{24}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

c. Misalkan $\overline{w}_2$ merupakan komponen dari $\overline{a}$ yang tegak lurus terhadap $\overline{b}$, maka $\overline{w}_2 = \overline{a} - \overline{w}_1 = (4,1,3) - (2,1,-1) = (2,0,2)$

IV.5 Perkalian silang vektor

Sebelum membahas ke masalah perkalian silang dari dua buah vektor, akan dijelaskan beberapa definisi terlebih dahulu

Vektor satuan

Vektor satuan didefinisikan sebagai vektor yang memiliki panjang satu satuan. Di bidang , vektor satuan yang searah dengan sumbu x dan y dinyatakan sebagai

$\bar{i}$ = (1,0) dan $\bar{j}$ = (0,1), sedangkan pada ruang (R^3) , vektor satuan yang searah sumbu x,y dan z adalah $\bar{i}$ = (1,0,0) , $\bar{j}$ = (0,1,0) dan $\bar{k}$ = (0,0,1).

Penulisan komponen dari vektor juga dapat menggunakan vektor satuan . Misalkan

$\bar{u}$ = (a,b) , maka u juga dapat dituliskan $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$

$\bar{v}$ = (a,b,c) , maka $\bar{v}$ juga dapat dituliskan $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

Perkalian silang antara dua vektor di $\mathbf{R^3}$

Diketahui $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Perkalian silang antara $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ didefinisikan sebagai :

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \bar{k}$$

$$= (u_2.v_3 - u_3.v_2)\,\bar{i} - (u_1.v_3 - u_3.v_1)\,\bar{j} + (u_1.v_2 - u_2.v_1)\,\bar{k}$$

Hasil kali silang dari dua buah vektor akan menghasilkan suatu vektor tegak lurus terhadap $\bar{u}$ dan $\bar{v}$. Sedangkan untuk mengetahui panjang dari vektor ini, akan dilakukan analisa yang lebih jauh untuk mengetahuinya .

Kuadrat dari norm $\bar{u} \times \bar{v}$ adalah $\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2$

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = (u_2.v_3 - u_3.v_2)^2 + (u_1.v_3 - u_3.v_1)^2 + (u_1.v_2 - u_2.v_1)^2$$

$$\vdots$$

$$= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$$

$$= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u}.\bar{v})^2$$ → biasa disebut *identitas Lagrange*

Dari identitas Lagrange

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u}.\bar{v})^2$$

$$= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\|\bar{u}\|.\|\bar{v}\| \cos\theta)^2$$ (θ sudut yang dibentuk oleh $\bar{u}$ dan $\bar{v}$)

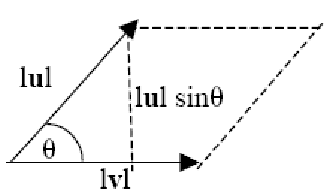
$$= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 (1 - \cos\theta)^2$$

$$= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 \sin^2\theta$$

atau

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \sin\theta$$

Nilai ini merupakan luas segi empat yang dibentuk $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ seperti ditunjukkan dari gambar berikut :



Luas segi empat = panjang alas x tinggi

$$= \|\bar{v}\| \quad x \quad \|\bar{u}\| \sin\theta$$

$$= \|\bar{u}\| \; \|\bar{v}\| \; \sin\theta$$

Jadi hasil kali silang dua vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ akan menghasilkan suatu vektor yang tegak lurus terhadap $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ serta memiliki panjang sama dengan luas dari segi empat yang dibentuk oleh vektor $\bar{u}$ dan $\bar{v}$.

Contoh 4.5.1

Diketahui $\bar{a} = (1,2,1)$ dan $\bar{b} = (2,2,3)$

Hitung luas segi empat yang dibentuk oleh $\bar{a}$ dan $\bar{b}$!

Jawab

Luas segi empat = $\|\bar{a} \times \bar{b}\|$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6 - 2)\ \bar{i} \;\; - (3 - 2)\ \bar{j} \;\; + (2 - 4)\ \bar{k}$$

$$= 4\ \bar{i} - \bar{j} - 2\ \bar{k} = (4 ,-1,-2)$$

Jadi luas segi empat = $\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$

Contoh 4.5.2

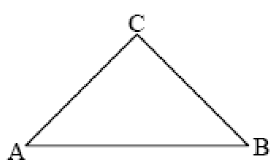
Diketahui segitiga ABC dengan titik – titik sudut adalah :

A (2,1,–2) , B (0,–1,0) dan C (–1,2,–1)

Hitung luas segitiga ABC !

Jawab

Misalkan segitiga ABC yang dimaksud berbentuk seperti dibawah ini :



Segitiga ABC tersebut dapat dipandang sebagai bangun yang dibentuk oleh dua vektor $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ atau oleh $\overrightarrow{CA}$ dan $\overrightarrow{CB}$.

Misalkan $\bar{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,-2,2)$ dan $\bar{b} = \overrightarrow{AC} = (-3,1,1)$ maka luas segitiga ABC merupakan ½ kali luas segiempat yang dibentuk oleh vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$, jadi

Luas segitiga ABC = ½ . $\|\bar{a} \times \bar{b}\|$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2 -2)\ \bar{i} - (-2 -6)\ \bar{j} + (-2+6)\ \bar{k} = -4\ \bar{i} -8\ \bar{j} + 4\bar{k}$$

$\left\| \bar{a} \times \bar{b} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{96}$

Jadi luas segitiga ABC = ½ $\sqrt{96}$

Pemilihan titik sudut dalam hal ini adalah bebas , sedangkan hasil akhirnya akan tetap sama.

Beberapa sifat yang berlaku dalm hasil kali silang

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$
2. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$
3. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$
4. $k(\bar{a} \times \bar{b}) = (k\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times k\bar{b}$
5. $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$

1. Diketahui $\bar{u}$ adalah vektor yang merupakan ruas garis dari titik A (2,3,4) ke titik B (5,5,5)
   a. Tentukan vektor $\bar{u}$ tersebut dan hitung berapa norm dari $\bar{u}$!
   b. Hitung jarak antara $\bar{u}$ dengan $\bar{v}$ = (1,1,3)

2. Diketahui $\bar{u}$ = (2,k,3) dan $\bar{v}$ = (4,2,7) sedangkan jarak antara $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ = 6 satuan , Tentukan nilai k !

3. Tentukan nilai k agar vektor $\bar{u}$ = (2k,k,3) dan $\bar{v}$ = (k,5,–1) saling tegak lurus !

4. Tentukan nilai k agar sudut antara $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ = 180° dengan $\bar{u}$ = (k+1,k+1,1) dan $\bar{v}$ = (–k–1, –k–1, k) !

5. Diketahui $\bar{u}$ = (–1,3) dan $\bar{v}$ = (4,1)
   a. Tentukan vektor proyeksi tegak lurus $\bar{u}$ terhadap $\bar{v}$!
   b. Tentukan komponen $\bar{u}$ yang tegak lurus terhadap $\bar{v}$!

6. Diketahui segitiga ABC dengan titik – titik sudut A (1,2,3) ,B (–2,2,1) dan C (3,1,3)
   a. Hitung luas segitiga ABC dengan menggunakan A sebagai titik sudut !
   b. Hitung luas segitiga ABC dengan menggunakan B sebagai titik sudut !

7. Diketahui $\bar{a}$ = (1,2,1) , $\bar{b}$ = (1, –1,1) dan $\bar{c}$ = (1,3,2)
   a. Tentukan vektor – vektor yang tegak lurus terhadap $\bar{a}$ dan $\bar{c}$ (berikan contoh 3 vektor) !
   b. Hitung luas segitiga yang titik – titik sudutnya merupakan ujung – ujung dari vektor posisi $\bar{a}$, $\bar{b}$ dan $\bar{c}$!