MATRIKS

DAFTAR SLIDE

Determinan Matriks

Inverse Matriks

DETERMINAN MATRIKS

- Setiap matriks persegi atau bujur sangkar memiliki nilai determinan
- Nilai determinan dari suatu matriks merupakan suatu skalar.
- Jika nilai determinan suatu matriks sama dengan nol, maka matriks tersebut disebut matriks singular.

NOTASI DETERMINAN

- Misalkan matriks A merupakan sebuah matriks bujur sangkar
- Fungsi determinan dinyatakan oleh det (A)
- Jumlah det(A) disebut determinan A
- det(A) sering dinotasikan |A|

NOTASI DETERMINAN

- Pada matriks 2x2 cara menghitung nilai determinannya adalah :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

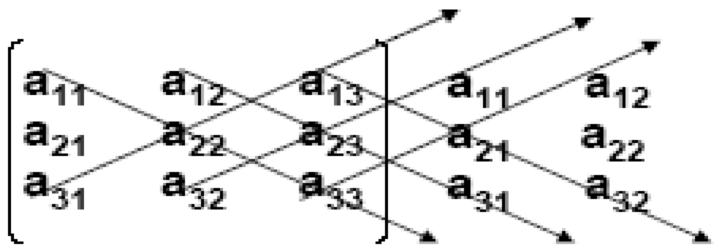
- Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det(A) = 6 - 5 = 1$$

METODE SARRUS

- Pada matriks 3x3 cara menghitung nilai determinannya adalah menggunakan Metode Sarrus
- Metode Sarrus hanya untuk matrix berdimensi 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

METODE SARRUS

- Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Nilai Determinan dicari menggunakan metode Sarrus

det(A) = (-2·1 ·-1) + (2 ·3 ·2) + (-3 ·-1 ·0) – (-3 ·1 ·2) –(-2 ·3 ·0)-(2 ·-1 ·-1)

= 2 +12+0+6-0-2

= 18

MINOR

- Yang dimaksud dengan MINOR unsur a_{ij} adalah determinan yang berasal dari determinan orde ke-n tadi dikurangi dengan baris ke-i dan kolom ke-j.
- Dinotasikan dengan M_{ij}
- Contoh Minor dari elemen a_{11}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

MINOR

- Minor-minor dari Matrik A (ordo 3x3)

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

KOFAKTOR MATRIKS

- Kofaktor dari baris ke-i dan kolom ke-j dituliskan dengan

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- Contoh :

  Kofaktor dari elemen a_{11}

$$c_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

TEOREMA LAPLACE

- Determinan dari suatu matriks sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya

Ekspansi Baris

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{i1}c_{i1}+a_{i2}c_{i2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+ a_{in}c_{in}$$

Ekspansi Kolom

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{1j}c_{1j}+a_{2j}c_{2j}+\ldots\ldots\ldots\ldots+ a_{nj}c_{nj}$$

TEOREMA LAPLACE

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor Pada Baris

- Misalkan ada sebuah matriks A berordo 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris pertama

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= a_{11}\left|M_{11}\right| - a_{12}\left|M_{12}\right| + a_{13}\left|M_{13}\right| \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

TEOREMA LAPLACE

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris kedua

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} \\
&= a_{21}|M_{21}| - a_{22}|M_{22}| + a_{23}|M_{23}| \\
&= a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris ketiga

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} \\
&= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}| \\
&= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

TEOREMA LAPLACE

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor Pada Kolom

- Misalkan ada sebuah matriks A berordo 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom pertama

$$|A| = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31}$$

$$= a_{11}|M_{11}| - a_{21}|M_{21}| + a_{31}|M_{31}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

TEORAMA LAPLACE

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom kedua

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32} \\
&= a_{12}\left|M_{12}\right| - a_{22}\left|M_{22}\right| + a_{32}\left|M_{32}\right| \\
&= a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom ketiga

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33} \\
&= a_{13}\left|M_{13}\right| - a_{23}\left|M_{23}\right| + a_{33}\left|M_{33}\right| \\
&= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

DET MATRIKS SEGITIGA

- Jika A adalah matriks segitiga bujur sangkar berupa segitiga atas atau segitiga bawah maka nilai det(A) adalah hasil kali diagonal matriks tersebut

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots dst$$

- Contoh

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 2 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 = -1296$$

TRANSPOSE MATRIKS

- Jika A adalah suatu matriks m x n, maka tranpose A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks n x m yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari A dan seterusnya.
- Contoh :

  matriks A : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ berordo 2 x 3

  transposenya : $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ berordo 3 x 2

TRANSPOSE MATRIKS

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

$$1.\ (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2.\ (A^T)^T = A$$

$$3.\ (AB)^T = B^T A^T$$

$$4.\ (kA)^T = kA^T$$

TRANSPOSE MATRIKS

Pembuktian aturan no1 :
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

TERBUKTI

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

TRANSPOSE MATRIKS

Pembuktian aturan no 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

TERBUKTI

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

MATRIKS SIMETRI

Sebuah matriks dikatakan simetri apabila hasil dari transpose matriks A sama dengan matriks A itu sendiri.

$$\boxed{A^T = A}$$

Contoh :

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIKS

- Matriks invers dari suatu matriks A adalah matriks B yang apabila dikalikan dengan matriks A memberikan satuan I
- ***AB* = *I***
- Notasi matriks invers : A^{-1}
- Sebuah matriks yang dikalikan matriks inversenya akan menghasilkan matrik satuan

$$A^{-1}A = I$$

- Jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{Maka} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIX

- Langkah-langkah untuk mencari invers matriks M yang berordo 3x3 adalah :
  - Cari determinan dari M
  - Transpose matriks M sehingga menjadi M^T
  - Cari adjoin matriks
  - Gunakan rumus

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (adjoin(M))$$

INVERS MATRIX

- Contoh Soal :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cari Determinannya :

det(M) = 1(0-24)-2(0-20)+3(0-5) = 1

- Transpose matriks M

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIX

- Temukan matriks kofaktor dengan menghitung minor-minor matriksnya

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- Hasilnya :

$$\begin{bmatrix} -24 & -18 & 5 \\ -20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

INVERS MATRIX

- Hasil Adjoinnya : $\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

- Hasil akhir

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

REFERENSI

1. Discrete Mathematics and its Applications; Kenneth H. Rosen; McGraw Hill; sixth edition; 2007
2. http://p4tkmatematika.org/
3. http://www.idomaths.com/id/matriks.php