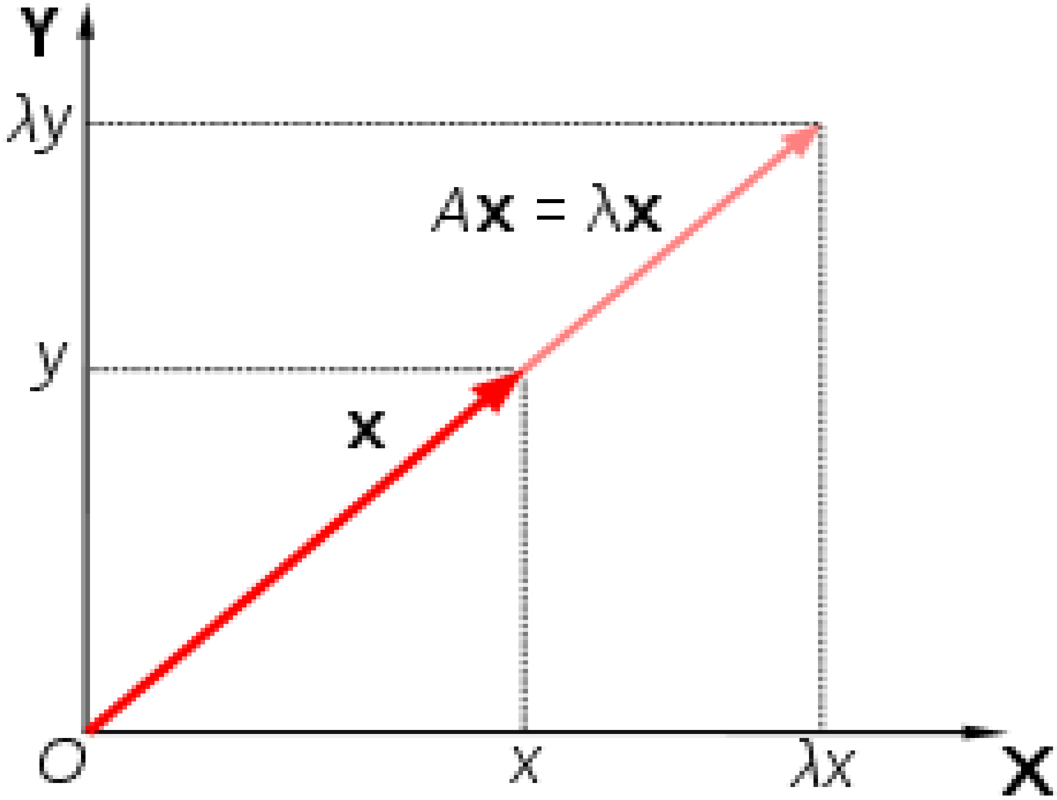
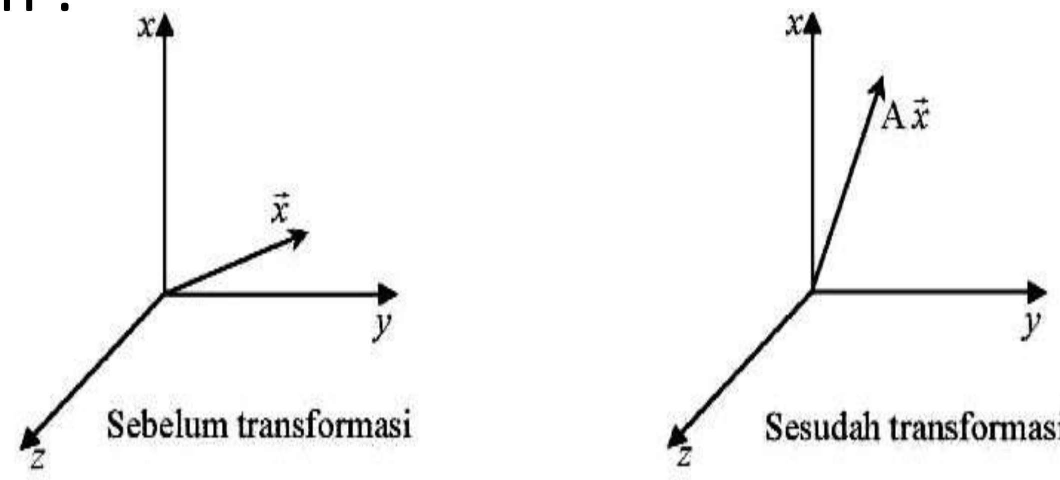
Eigen value & Eigen vektor



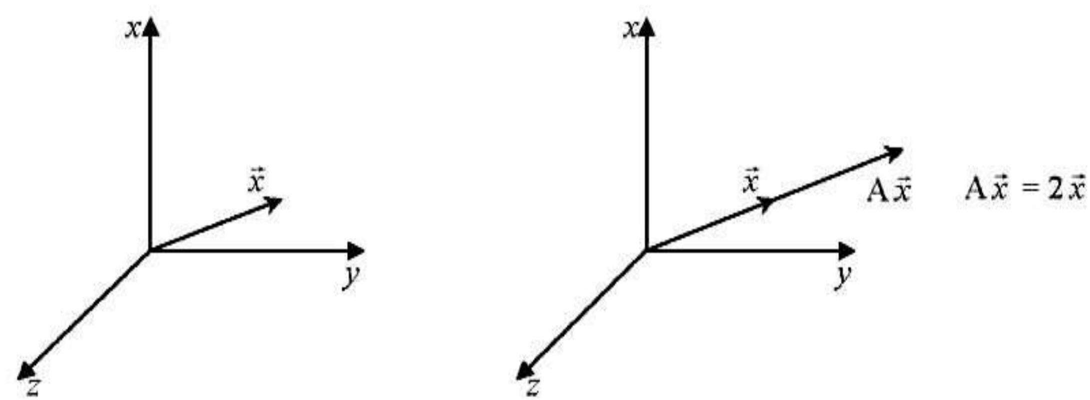
Hubungan antara vektor ***x*** (bukan nol) dengan vektor ***Ax*** yang berada di $\boldsymbol{R^n}$ pada proses transformasi dapat terjadi dua kemungkinan :

1)



Tidak mudah untuk dibayangkan hubungan keduanya.

2)



Keduanya, mempunyai hubungan geometri yang cukup jelas.

Definisi :

Jika terdapat suatu matrik $\boldsymbol{A}$ berukuran n x n dan vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ berukuran $n \times 1$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, maka dapat dituliskan :

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$$

$\boldsymbol{Ax}$: vektor berukuran n x 1

λ : skalar $\in$ riil yang memenuhi persamaan, disebut nilai eigen (karekteristik)

x : vektor eigen

Cara menentukan nilai eigen dari A :

Untuk mencari nilai eigen dari matrik A yang berukuran n x n yang memenuhi persamaan :

Ax = λx dapat ditulis sebagai : ***Ax = λIx*** atau ekivalen : (***λI – A***)***x*** = 0

Sistem persamaan tersebut memiliki jawab bukan nol (singular), jika dan hanya jika :

$$\left|\lambda I - A\right| = 0$$

Ini disebut sebagai ***persamaan karakteristik***

(polinomial dalam λ)

Contoh soal :

1. Buktikan vektor $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan tentukan nilai eigennya!

Jawab :

Untuk membuktikannya dilakukan dengan cara mengalikan matrik dengan vektor, sehingga diperoleh hasil kelipatan dari vektor iatu sendiri.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{-1}_{\text{nilai eigen}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{vektor eigen}}$$

2. Carilah nilai eigen dari : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab :

Persamaan karakteristik :

$$\left| \lambda I - A \right| = \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda -2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda -3 \end{vmatrix} = 0$$

$= (\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)+2(\lambda-2) = (\lambda-2)\ (\lambda(\lambda-3)+2)=0$

$= (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)= 0$

Nilai-nilai eigen: 1 dan 2

Cara menentukan vektor eigen dari A :

- Banyaknya nilai eigen maksimal *n* buah.

  Untuk setiap nilai eigen dapat dicari ruang solusi untuk *x* dengan memasukkan nilai eigen ke dalam persamaan : $(\boldsymbol{\lambda I - A})\boldsymbol{x} = 0$

- Ruang solusi yang diperoleh disebut : **ruang eigen**. Dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tertentu dapat dicari minimal sebuah **basis ruang eigen** yang saling bebas linier.

- Vektor eigen yang berhubungan dengan λ adalah vektor-vektor tidak nol dalam ruang eigen.

Contoh soal :

1. Tentukan basis dari ruang eigen : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab :

Dari hasil perhitungan sebelumnya diperoleh nilai eigen A adalah 1 dan 2. Dengan substitusi λ=1 ke persamaan : (*λI-A*)*x* = 0 diperoleh :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} x = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x = 0$$

$$[A \mid 0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis dari ruang eigen yang berhubungan dengan λ=1 adalah : $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk λ=2 :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix} x = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Basis dari ruang eigen yang berhubungan dengan λ=2 adalah : $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Carilah nilai-nilai eigen dan basis-basis untuk ruang eigen dari : $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Jawab :

Persamaan karakteristik :

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

det (λI – A)= 0

(λ-3)(λ) – (1)(-2)=0

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \longrightarrow$ Nilai eigen : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

Ruang vektor : $\begin{bmatrix} \lambda\text{-}3 & \text{-}2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_1 = 2$ diperoleh : $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} x_1 = -2x_2$$

Jadi vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ adalah vektor

tak nol : $x = \begin{bmatrix} -2\,s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jadi untuk λ=2, basisnya adalah : $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Tentukan *eigenvalues* dan *eigenvectors* dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Persamaan karakteristik: **det (A - λI) = 0**

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ $(3 - \lambda)^2 (4 - \lambda) + 2 + 2 - (4 - \lambda) - 2(3 - \lambda) - 2(3 - \lambda) = 0$

$(3 - \lambda)[(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 4] + \lambda = 0$

$(3 - \lambda)(8 - 7\lambda + \lambda^2) + \lambda = 0$

$$\rightarrow \lambda^3 - 10\lambda^2 + 28\lambda - 24 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 8\lambda + 12) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 6)(x - 2) = 0$$

$$\lambda = 2 \qquad \vee \qquad \lambda = 6$$

Jadi, *eigenvaluesnya* adalah 2 dan 6, sedangkan untuk mencari *eigenvectornya* maka *eigenvaluenya* dapat disubstitusikan ke dalam persamaan tersebut,

Untuk $\lambda = 2$,

$$Ax = 2x \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 - x_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, untuk *eigenvalue* 2 mempunyai 2 *eigenvectors* yakni $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda = 6$,

$$Ax = 6x \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$x_1 = x_3$$
$$x_2 = 2x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, untuk *eigenvalue* 6 mempunyai 1 *eigenvector*, yaitu $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Tentukan *eigenvalue* dari matriks *lower triangular* di bawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Jawab:

Persamaan karakteristik $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

➔ $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)(a_{44} - \lambda) = 0$

➔ $\lambda_1 = a_{11} \quad \vee \quad \lambda_2 = a_{22} \quad \vee \quad \lambda_3 = a_{33} \quad \vee \quad \lambda_4 = a_{44}.$

Catatan :

- Untuk kasus yang khusus, jika A memiliki n buah nilai eigen = λ, maka akan memiliki nilai eigen λ^k.
- Jika banyaknya nilai eigen dari A^k sebanyak n juga, maka basis ruang eigennya tetap sama.
- Tetapi jika jumlah nilai eigennya kurang dari n (terjadi jika ada nilai eigen yang saling berlawanan tanda), maka salah satu nilai eigennya akan memiliki basis ruang eigen yang berbeda

Misalkan :

$$B = A^2 = \; = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka nilai eigen untuk B adalah : $-1^2, 1^2, 2^2$ dengan basis ruang eigen untuk

$\lambda = 1$, basis ruang eigennya : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4$, basis ruang eigennya : $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Contoh soal :

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari A^5, bila : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab :

Nilai eigen dari A^5 adalah nilai eigen dari A dipangkatkan 5 sehingga diperoleh : 2^5 dan 6^5.

Sedangkan vektor eigen untuk $\lambda = 2^5$ tetap sama dengan vektor eigen $\lambda = 2$ yaitu : $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Serta vektor eigen untuk $\lambda = 6^5$ sama seperti $\lambda = 6$ yaitu : $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Pada contoh ini, untuk λ=1 memiliki dua basis ruang eigen yang berasal dari nilai eigen -1 dan 1.

- Karena berasal dari dua nilai eigen yang berbeda, maka basis ruang eigennya juga mengalami sedikit perubahan basis yaitu basis ruang eigen dengan λ= -1

- Basis ruang eigen $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ini merupakan vektor proyeksi dari $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ terhadap vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

  Dalam hal ini basis ruang eigen untuk λ= -1 dibuat saling orthogonal

Diagonalisasi

Definisi : Suatu matrik A berukuran n x n disebut dapat didiagonalisasi jika terdapat matrik P yang memiliki invers sehingga diperoleh matrik diagonal : $\boxed{D = P^{-1}AP.}$

P matrik *n x n* disebut matrik yang mendiago- nalisasi *A* dengan kolom-kolomnya merupakan *kolom dari basis ruang eigen* ***A***.

D merupakan matrik diagonal yang elemen dia- gonalnya merupakan *semua nilai eigen dari* ***A***

Cara menentukan *P*

- Jika matrik A ukuran n x n mempunyai n vektor eigen bebas linier {$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$} berhubungan dengan n nilai eigen {$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$} kemudian didiagonalisasi matrik P, maka formulasi matrik P adalah:

$$P=[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

- Jika D adalah matrik diagonal ukuran n x n dan D = $P^{-1}AP$, maka :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Nilai $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tergantung pada nilai $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$

Langkah-langkah yang digunakan untuk mendia-gonalisasi suatu matrik adalah sebagai berikut :

1. Tentukan n buah vektor eigen yang saling bebas linier dari A, misalkan $p_1, p_2, \ldots, p_n$

2. Bentuk matrik P yang isinya adalah $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sebagai vektor kolomnya.

3. Hasil kali $P^{-1}AP$ adalah matrik diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen yang sesuai dengan vektor eigen $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Catatan :

- Tidak semua matrik bujur sangkar dapat didiagonali-sasi, tergantung dari jumlah basis ruang eigen yang dimiliki.
- Jika matrik n x n :

  basis ruang eigen yang bebas linier = n, dapat didiagonalisasi.

  < n, tidak dapat.
- Saat matrik n x n memiliki nilai eigen sejumlah n, maka basis ruang eigennya juga berjumlah n.
- Saat matrik n x n jumlah nilai eigen kurang dari n, maka ada 2 kemungkinan yaitu basis ruang eigen juga berjumlah n atau kurang dari n
- Jadi pada saat jumlai nilai eigen sama dengan n, maka matrik *dapat didiagonalisasi*, sedangkan pada saat nilai eigen kurang dari n, maka matrik belum bisa ditentukan bisa atau tidak didiagonalisasi.

Contoh soal :

1. Carilah matrik P yang dapat mendiagonalisasi matrik

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ dan matrik diagonalnya !

Jawab :

Dari perhitungan sebelumnya diperoleh bahwa :

Basis ruang eigen yang berhubungan dengan λ= 1 adalah : $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Basis ruang eigen yang berhubungan dengan λ= 2 adalah : $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Diperoleh basis ruang eigen dari A : $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Maka : $P = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Dan matrik diagonal : $D=P^{-1}AP= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Diketahui : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan matrik yang mendiagonalisasi A dan matrik diagonalnya !

Jawab :

Dari perhitungan sebelumnya didapatkan nilai eigen :

- 1, 1 dan 2 dengan basis ruang eigen yang bersesuai-

an berturut-turut adalah : $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Jadi matrik pendiagonal P bisa ditentukan sebagai :

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan matrik diagonal : $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Kolom-kolom pada matrik P bisa diubah-ubah urutannya sehingga terdapat 6 matrik yang memenuhi jawaban.

Matrik D tentu saja juga mengikuti urutan dari matrik P

3. Diketahui $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Apakah matrik C dapat didiagonalisasi ?

Jawab

Persamaan karakteristik : $\det(\lambda I - C) = \bar{0}$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$$

Jadi nilai eigen : 1 , 2

Karena hanya ada dua nilai eigen maka belum bisa ditentukan apakah C dapat didiagonalisasi ataukah tidak. Untuk itu akan diperiksa banyaknya basis ruang eigen.

Untuk $\lambda = 1$, substitusi nilai $\lambda = 2$ ke persamaan $(\lambda I - C) \bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang eigen : $\bar{x} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jadi untuk $\lambda = 1$, ada satu basis ruang eigen yaitu : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda = 2$, substitusi nilai $\lambda = 2$ ke persamaan $(\lambda I - C)\,\bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang eigen : $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$

Jadi untuk $\lambda = 1$, ada satu basis ruang eigen yaitu : $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Karena hanya ada dua basis ruang eigen yang bebas linear, maka C tidak dapat didiagonalisasi

➢ Diagonalisasi ortogonal

Definisi : matrik bujursangkar P disebut matrik ortogonal apabila berlaku $\mathbf{P^T = P^{-1}}$

Matrik A dapat didiagonalisasi secara ortogonal jika terdapat matrik P yang ortogonal sehingga :

$$P^{-1}AP=D$$

dengan D adalah matrik diagonal.

Berbeda dengan diagonalisasi sebelumnya, matrik yang dapat didiagonalisasi atau tidak dijabarkan sebagai berikut :

- $P^{-1}AP = D$
- $PDP^{-1} = A$
- $PDP^{T} = A$ (dari sifat $P^{T} = P^{-1}$) ....(1)
- $(PDP^{T})^{T} = A^{T}$ (kedua ruas ditransposekan)
- $PDP^{T} = A^{T}$ ....(2)

Dari persamaan 1 dan 2 disimpulkan bahwa agar supaya matrik A dapat didiagonalisasi secara ortogonal, maka matrik A harus memenuhi sifat $A = A^{T}$ (A harus matrik simetri)

➢ Menentukan matrik P yang mendiagonalisasi secara ortogonal

- Sama seperti saat menentukan P pada diagonal biasa yaitu didasarkan pada basis ruang eigen.
- Misalkan : $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ merupakan basis ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kemudian $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ merupakan himpunan ortonormal hasil transformasi dari $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ dengan hasil kali dalam Euclides, maka matrik yang mendiagonalisasi secara ortogonal adalah :

  $P = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n]$ dan matrik diagonalnya adalah D

Contoh Soal :

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan matriks yang mendiagonalisasi A secara orthogonal beserta matriks diagonalnya !

Jawab

Persamaan karakteristik : $\det(\lambda I - A) = \bar{0}$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 \lambda - \lambda = \lambda \{ (\lambda - 1)^2 - 1 \} = 0$$

Nilai eigen : 0 , 2

Untuk $\lambda = 0$, substitusi nilai $\lambda = 0$ ke persamaan $(\lambda I - A)\,\bar{x} = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruang eigen : $\bar{x} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$

Jadi untuk $\lambda = 0$ terdapat dua basis ruang eigen : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Latihan soal :

1. Carilah semua nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor eigen dari matrik : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. Tentukan matrik P yang dapat membuat matrik

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ menjadi matrik diagonal !