Aljabar Linear

Pertemuan 12_14

Aljabar Vektor (Perkalian vektor)

Pembahasan

- Perkalian vektor dengan skalar
- Ruang vektor

- Perkalian Vektor dengan Vektor:

  Dot Product

  - Model *dot product*

  - Sifat *dot product*

Pendahuluan

- Penambahan dan pengurangan vektor, merupakan analisa sederhana dari aljabar vektor

- Pada pembahasan ini akan dibahas bagaimana konsep perkalian vektor dalam ruang berdimensi 2 atau dimensi 3, serta penerapannya pada bidang geometri, khususnya dengan perkalian vektor dengan skalar dan perkalian *dot product*

Perkalian
Vektor dengan Skalar

Definisi

- Untuk sembarang vektor $\boldsymbol{a}$ dengan α, maka:
  - panjang $\alpha\boldsymbol{a} = |\alpha|.|\boldsymbol{a}|$
  - jika $\boldsymbol{a} \neq 0$ dan $\alpha > 0$, $\alpha\boldsymbol{a}$ searah dengan $\boldsymbol{a}$
  - jika $\boldsymbol{a} \neq 0$ dan $\alpha < 0$, $\alpha\boldsymbol{a}$ berlawanan arah dengan $\boldsymbol{a}$
  - jika $\boldsymbol{a} = 0$ dan $\alpha = 0$, maka $\alpha\boldsymbol{a} = 0$

- Untuk vektor $\boldsymbol{a}$ dalam koordinat kartesian
  jika $\boldsymbol{a}$ = [a1,a2,a3] maka

$$\alpha\boldsymbol{a} = [\alpha\boldsymbol{a}1, \alpha\boldsymbol{a}2, \alpha\boldsymbol{a}3]$$

Sifat Perkalian skalar ‘n vektor

a) $\alpha a = a\alpha$	Komutatif
b) $\alpha(ka) = (\alpha k)a$	Asosiatif
c) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$	Distributif
d) $(\alpha + k)a = \alpha a + ka$	Distributif
e) $1 . a = a$	Elemen netral
f) $0 . a = 0$	Elemen central
g) $(-1)a = -a$	Elemen invers

Ruang Vektor

- Merupakan himpunan elemen vektor yang terdefinisikan sekurang-kurangnya dua operasi yang membentuk group

- Berlaku sifat distributif dan assosiatif gabungan
  - distributif operasi 1 terhadap operasi 2
  - distributif operasi 2 terhadap operasi 1
  - assosiatif

Kombinasi linear

- Untuk sembarang vektor ***a1***, … , ***am*** didalam ruang vektor ***v*** , maka ungkapan:

  α1***a***1 + α2***a***2 + … + αm ***a***m.

  α1, … , αm skalar sembarang

  disebut sebagai <u>"Kombinasi Linear"</u>

Ketergantungan Linear

- Jika kombinasi linear dari m buah vektor sama dengan vektor nol dan berlaku hanya untuk $\alpha i = 0$ (i=1,2,…,m), maka m buah vektor tersebut dikatakan sebagai 'vektor-vektor bebas linear'

- Jika sekurang-kurangnya terdapat satu $\alpha 1=0$, dimana kombinasi linear dari m buah vektor sama dengan vektor nol, maka m buah vektor tersebut dikatakan sebagai 'vektor-vektor bergantungan linear'

  $$\alpha 1\boldsymbol{a}1 + \alpha 2\boldsymbol{a}2 + \ldots + \alpha m\,\boldsymbol{a}m = 0$$

- Berlaku untuk $\alpha 1 = \alpha 2 = \ldots = \alpha m = 0$ (vektor2 bebas linear)

  terdapat minimal satu $\alpha 1 \neq 0$ (vektor2 tidak bebas linear)

Basis ‘n Dimensi Ruang Vektor

- Suatu vektor riil **R** memiliki dimensi n ditulis sebagai **R**n jika dan hanya jika terdapat n buah vektor dalam **R** yang saling bebas linear

- n buah vektor bebas linear dalam **R** disebut sebagai ‘vektor basis’. Hal ini berarti setiap vektor lain dalam **R** selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis.

- Vektor basis bmempunyai panjang 1 unit

Contoh :

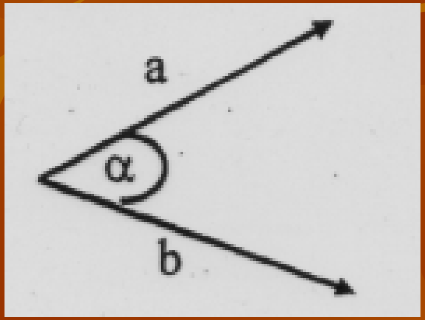
- Dalam ruang vektor berdimensi 2 terdapat 2 buah vektor basis. Dalam koordinat cartesian vektor-vektor basis ini dinyatakan sebagai i, j.
- Untuk vektor-vektor dalam koordinat cartesian 3 dimensi, vektor basis masing-masing i, j, k.

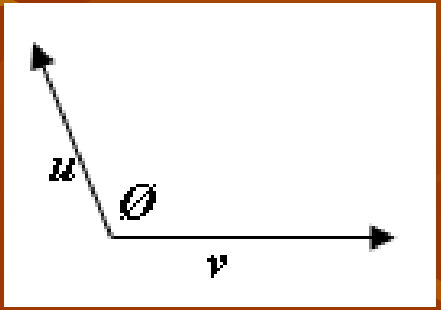
Perkalian Titik

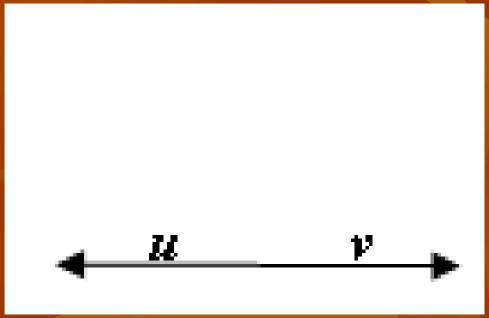
(Dot Product)

Visualisasi

- Vektor-vektor diposisikan sehingga titik pangkalnya berimpitan
- Memiliki sudut antara dua vektor yaitu Ø (dibaca teta) yang memenuhi $0 \leq Ø \leq \pi$







Rumus

- Jika ***u*** dan ***v*** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi-2 atau berdimensi-3 dan Ø adalah sudut antara ***u*** dan ***v***, maka hasil kali titik ***u.v*** adalah:

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \lvert\boldsymbol{u}\rvert\lvert\boldsymbol{v}\rvert \cos \varnothing$	jika $\boldsymbol{u} \neq 0$ dan $\boldsymbol{v} \neq 0$
$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$	jika $\boldsymbol{u} = 0$ dan $\boldsymbol{v} = 0$

Orthogonalitas dua vektor

- Dua vektor tidak nol dikatakan orthogonal (saling tegak lurus) jika dan hanya jika hasil kali dalamnya adalah nol.
- Beberapa formulasi dari perkalian titik ini dapat kita turunkan sebagai berikut:

$$a.a = |a||a|\cos 0^\circ = |a^2| \Rightarrow |a| = \sqrt{a.a}$$

$$\cos\alpha = \frac{a.b}{|a||b|} = \frac{a.b}{\sqrt{a.a}\sqrt{b.b}}$$

Sifat *Dot Product*

- Untuk setiap vektor sebarang a, b, c dan skalar α1, α2 berlaku:

$(\alpha_1\bar{a}+\alpha_2\bar{b})\,.\,\bar{c} = \alpha_1\,.\,\bar{a}\,.\,\bar{c}+\alpha_2\,.\,\bar{b}\,.\,\bar{c} \Rightarrow$ Distributif linier.

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = \bar{b}\,.\,\bar{a} \Rightarrow$ Komutatif (simetri).

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}\,.\,\bar{a} \geq 0 \\ \bar{a}\,.\,\bar{a} = 0 \text{ jika dan hanya jika } \bar{a} = 0 \end{array}\right\} \text{Definit Positif}$$

Formulasi Khusus

$| a.b | \le | a \| b | \Rightarrow$ *Pertidaksamaan Schwarz*

$| a + b | \le | a | + | b | \Rightarrow$ *Pertidaksamaan segitiga*

$| a + b |^2 + | a - b |^2 = 2(| a |^2 + | b |^2) \Rightarrow$ *Pers .Jajaran Genjang*

Jika a da b dinyatakan dalam komponennya, maka:

a.b = a1 b1 + a2 b2 + a3 b3 (vektor 3 dimensi)

Contoh Soal

Jika diketahui vektor a = [1,2,0], b=[3,-2,1].

Tentukanlah:

- panjang vektor a, panjang vektor b, sudut antara vektor a dan b,
- sudut vektor c = a + b terhadap sumbu –x

<u>Jawaban:</u>

Contoh soal 2 :

Suatu partikel P dikenakan gaya tetap a yang menyebabkan partikel tersebut bergerak sejauh d membentuk sudut α arah gaya a, maka kerja yang dilakukan oleh gaya tersebut adalah ?

Jawab :

Cara lain menyatakan dot produc

a.b dituliskan pula sebagai ***(a,b) : Inner Product***

|a| dituliskan pula sebagai $\| a \| = \sqrt{(a,b)}$

Summary

- Perkalian vektor dengan skalar merupakan perbesaran atau pengecilan vektor, dengan bilangan skalar merupakan satuan pembandingnya.
- vektor dalam ruang **R**n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis
- Rumus untuk dot product

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \lvert\boldsymbol{u}\rvert\lvert\boldsymbol{v}\rvert \cos Ø$	jika $\boldsymbol{u} \neq 0$ dan $\boldsymbol{v} \neq 0$
$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$	jika $\boldsymbol{u} = 0$ dan $\boldsymbol{v} = 0$

- Perkalian titik (dot product) antara 2 vektor akan menghasilkan suatu nilai skalar

Daftar Pustaka

Anton, Howard. Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7. 2000. Penerbit Interaksara. Jakarta

Noor Ifada. Bahan Kuliah Aljabar Linear

Anton, Howard. Dasar-dasar Aljabar Linear Jilid 2 Edisi 7. 2000. Penerbit Interaksara. Jakarta