

METODE SIMPLEKS DALAM PROGRAM LINIER

Dian Wirdasari

Abstrak

Metode simpleks merupakan salah satu teknik penyelesaian dalam program linier yang digunakan sebagai teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dengan pengalokasian sumberdaya secara optimal. Metode simpleks digunakan untuk mencari nilai optimal dari program linier yang melibatkan banyak constraint (pembatas) dan banyak variabel (lebih dari dua variabel). Penemuan metode ini merupakan lompatan besar dalam riset operasi dan digunakan sebagai prosedur penyelesaian dari setiap program komputer

Kata Kunci: *Program linier, Metode simpleks*

A. PENDAHULUAN

Metode penyelesaian program linier dengan metode simpleks pertamakali dikemukakan oleh George Dantzig pada tahun 1947. Metode ini menjadi terkenal ketika ditemukan alat hitung elektronik dan menjadi populer ketika munculnya komputer. Proses perhitungan metode ini dengan melakukan iterasi berulang-ulang sampai tercapai hasil optimal dan proses perhitungan ini menjadi mudah dengan komputer. Selanjutnya berbagai alat dan metode dikembangkan untuk menyelesaikan masalah program linear bahkan sampai pada masalah riset operasi hingga tahun 1950 an seperti pemrograman dinamik, teori antrian, dan persediaan.

Program Linier merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang langka untuk mencapai tujuan tunggal seperti memaksimumkan keuntungan atau meminimumkan biaya. LP (*Linier Programming*) banyak diterapkan dalam membantu menyelesaikan masalah ekonomi, industri, militer, social dan lain-lain.

Karakteristik persoalan dalam program linier adalah sebagai berikut:

- a. Ada tujuan yang ingin dicapai
- b. Tersedia beberapa alternatif untuk mencapai tujuan
- c. Sumberdaya dalam keadaan terbatas
- d. Dapat dirumuskan dalam bentuk matematika (persamaan/ketidaksamaan)

Contoh pernyataan ketidaksamaan:

Untuk menghasilkan sejumlah meja dan kursi secara optimal, total biaya yang dikeluarkan tidak boleh lebih dari dana yang tersedia.

Ada dua metode penyelesaian masalah yang digunakan dalam program linier, yaitu metode grafis (untuk 2 variabel) dan metode simpleks (untuk 2 variabel atau lebih). Beberapa ketentuan yang perlu diperhatikan dalam penyelesaian metode simpleks:

1. Nilai kanan fungsi tujuan harus nol (0)
2. Nilai kanan fungsi kendala harus positif. Apabila negatif, nilai tersebut harus dikali dengan -1
3. Fungsi kendala dengan tanda " \leq " harus diubah ke bentuk " $=$ " dengan menambahkan variabel slack/surplus. Variabel slack/surplus disebut juga variabel dasar. Penambahan slack variabel menyatakan kapasitas yang tidak digunakan atau tersisa pada sumber daya tersebut. Hal ini

karena ada kemungkinan kapasitas yang tersedia tidak semua digunakan dalam proses produksi.

4. Fungsi kendala dengan tanda " \geq " diubah ke bentuk " \leq " dengan cara mengkalikan dengan -1, lalu diubah ke bentuk persamaan ($=$) dengan ditambah variabel slack. Kemudian karena nilai kanan-nya negatif, dikalikan lagi dengan -1 dan ditambah *artificial variabel* (M). *Artificial variabel* ini secara fisik tidak mempunyai arti, dan hanya digunakan untuk kepentingan perhitungan saja.
5. Fungsi kendala dengan tanda " $=$ " harus ditambah *artificial variabel* (M)

Metode simplex merupakan prosedur aljabar yang bersifat iteratif, yang bergerak selangkah demi selangkah, dimulai dari suatu titik ekstrem pada daerah fisibel (ruang solusi) menuju ke titik ekstrem optimum.

B. FORMULASI MODEL PROGRAM LINIER

Masalah keputusan yang sering dihadapi analis adalah mengalokasikan secara optimum keterbatasan/kelangkaan sumber daya. Sumber daya dapat berupa uang, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruang atau teknologi. Tugas analis adalah mencapai hasil terbaik yang mungkin dengan keterbatasan sumber daya itu. Hasil yang diinginkan mungkin ditunjukkan sebagai maksimasi dari beberapa ukuran profit, penjualan dan kesejahteraan, atau minimisasi pada biaya, waktu dan jarak. Masalah optimasi ini dapat diselesaikan dengan program linier.

Langkah-langkah dalam perumusan model program linier adalah sebagai berikut:

- i) Definisikan Variabel Keputusan (Decision Variable)
 - Variabel yang nilainya akan dicari
- ii) Rumuskan Fungsi Tujuan:
 - Maksimisasi atau Minimisasi
 - Tentukan koefisien dari variabel keputusan
- iii) Rumuskan Fungsi Kendala Sumberdaya:
 - Tentukan kebutuhan sumberdaya untuk masing-masing peubah keputusan.
 - Tentukan jumlah ketersediaan sumberdaya sbg pembatas.
- iv) Tetapkan kendala non-negatif
 - Setiap keputusan (kuantitatif) yang diambil tidak boleh mempunyai nilai negatif.

Contoh Persoalan: (Perusahaan Meubel)

Suatu perusahaan menghasilkan dua produk, meja dan kursi yang diproses melalui dua bagian fungsi: perakitan dan pemolesan. Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesan hanya 48 jam kerja. Untuk menghasilkan 1 meja diperlukan 4 jam kerja perakitan dan 2 jam kerja pemolesan, sedangkan untuk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan. Laba untuk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing-masing Rp. 80.000 dan Rp. 60.000,- Berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan?

Penyelesaian:

Definisi variabel keputusan:

Keputusan yang akan diambil adalah berapakah jumlah meja dan kursi yg akan dihasilkan. Jika meja disimbolkan dengan M dan kursi dengan K, maka definisi variabel keputusan:

M = jumlah meja yang akan dihasilkan (dalam satuan unit)

K = jumlah kursi yang akan dihasilkan (dalam satuan unit)

Perumusan persoalan dalam bentuk tabel:

PROSES	Waktu yang dibutuhkan per unit		Total Jam Tersedia
	Meja	Kursi	
Perakitan	4	2	60
Pemolesan	2	4	48
Laba/unit	80000	60000	

Perumusan fungsi tujuan:

Laba untuk setiap meja dan kursi yg dihasilkan masing-masing Rp.80.000 dan Rp. 60.000. Tujuan perusahaan adalah untuk memaksimumkan laba dari sejumlah meja dan kursi yang dihasilkan. Dengan demikian, fungsi tujuan dapat ditulis:

Fungsi Maks.:

$$\text{Laba} = 8M + 6K \text{ (dalam satuan Rp.10.000)}$$

Perumusan fungsi kendala:

Dengan kendala:

$$1) 4M + 2K \leq 60$$

$$2) 2M + 4K \leq 48$$

Kendala non-negatif:

Meja dan kursi yang dihasilkan tidak memiliki nilai negatif.

$$M \geq 0$$

$$K \geq 0$$

C. KETENTUAN PENGGUNAAN TABEL SIMPLEKS

- Fungsi – fungsi batasan menggunakan notasi \leq
- Fungsi Batasan harus diubah dari \leq ke bentuk " $=$ " dengan menambahkan slack variable (variabel surplus) yang dimulai dari $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m}$
- Proses pengulangan dihentikan apabila koefisien-koefisien dari fungsi tujuan sudah tidak ada yang negatif.

Bentuk tabel simpleks adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Bentuk Tabel Simpleks

Variabel Dasar (VD)	Z	X ₁	X ₂	...	Slack Variabel				Nilai Kanan (NK)
					X _n	X _{n+1}	X _{n+2}	... X _{n+m}	
Z	1	-C ₁₁	-C ₂₂	-C _n	0	0	0	0
X _{n+1}	0					1	0	0	b ₁
X _{n+2}	0	a ₁₁	a ₁₂		a _n	0	0	0	b ₁
⋮									
X _{n+m}	0	a _{m1}	a _{m2}		a _{mn}	0	0	1	b _m

Dimana :

m = Banyaknya fungsi Batasan (kendala)

n = Banyaknya variable Ouput

b_1 = Batasan sumber 1

b_2 = Batasan sumber 2

b_m = batasan sumber m

D. METODE SIMPLEKS MAKSIMISASI

Untuk implementasi metode simpleks maksimisasi, kasus yang diambil adalah contoh pada perusahaan meubel pada bagian 2. Tahapan-tahapannya dijelaskan pada bagian berikut.

1. Menentukan fungsi tujuan dan fungsi-fungsi kendala

Misalkan X_1 = Meja dan X_2 = Kursi

Fungsi Tujuan : $Z = 8X_1 + 6X_2$

Fungsi-fungsi Kendala:

$$1) 4 X_1 + 2 X_2 \leq 60$$

$$2) 2 X_1 + 4 X_2 \leq 48$$

2. Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala ke bentuk standar

Bentuk Standar Simpleks:

$$Z - 8X_1 - 6X_2 = 0$$

$$4 X_1 + 2 X_2 + X_3 = 60$$

$$2 X_1 + 4 X_2 + X_4 = 48$$

Dengan X_3 dan X_4 adalah variabel slack.

3. Membuat tabel simpleks awal

- Menentukan Kolom Kunci dan Baris Kunci sebagai dasar iterasi.
- Kolom kunci ditentukan oleh nilai Z yang paling kecil (Negatif)
- Baris Kunci ditentukan berdasarkan nilai indeks terkecil.

$$\text{Cara menentukan indeks} = \frac{\text{Nilai Kanan (NK)}}{\text{Kolom Kunci (KK)}}$$

- Menentukan nilai elemen cell yaitu nilai perpotongan antara kolom kunci dengan baris kunci.

Langkah-langkah di atas disajikan pada tabel simpleks berikut ini.

Tabel 2. Tabel Simpleks Awal

Variabel Dasar (VD)	Z	X ₁	X ₂	Slack Variabel		Nilai Kanan (NK)	Indeks
				X ₃	X ₄		
Z	1	-8	-6	0	0	0	0
X ₃	0	4	2	1	0	60	15
X ₄	0	2	4	0	1	48	24

Kolom Kunci (KK)

Elemen Cell

4. Melakukan Iterasi

Dengan menentukan baris kunci baru dan baris-baris lainnya termasuk Z.

➤ **Membuat baris kunci baru**

$$\text{Baris Kunci Baru} = \frac{\text{Baris Kunci Lama}}{\text{Elemen Cell}}$$

$$\text{Baris Kunci Baru (X}_1\text{)} = \frac{\begin{matrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 60 \end{matrix}}{4}$$

$$X_1 = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 15$$

➤ **Membuat baris Z baru**

Baris Z Baru = Baris Z Lama – (Nilai Kolom Kunci Baris yang Sesuai * Baris Kunci Baru)

$$\text{Baris Z Baru} = (-8 \quad -6 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (-8) * (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 15)$$

$$= 0 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \quad 120$$

➤ **Membuat baris variabel baru**

Baris X₄ Baru = Baris X₄ Lama – (Nilai Kolom Kunci Baris yang Sesuai * Baris Kunci Baru)

$$\text{Baris X}_4 \text{ Baru} = (2 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad 48) - (2) * (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 15)$$

$$= 0 \quad 3 \quad -\frac{1}{2} \quad 1 \quad 18$$

Baris kunci baru (X₁), baris Z baru, baris X₄ baru, nilai-nilainya disajikan pada tabel simpleks berikut. Tabel simpleks ini adalah tabel simpleks hasil iterasi pertama.

Tabel 3. Tabel Simpleks Hasil Iterasi-1

Variabel Dasar (VD)	Z	X ₁	X ₂	Slack Variabel		Nilai Kanan (NK)	Indeks
				X ₃	X ₄		
Z	1	0	-2	2	0	120	-60
X ₁	0	1	½	¼	0	15	7,5
X ₄	0	0	3	½	1	18	6

Baris Kunci (BK)

Kolom Kunci (KK)
Elemen Cell

5. Lakukan Iterasi Kembali sampai tidak ada nilai baris Z yang negatif

- **Membuat baris kunci baru**

$$\text{Baris Kunci Baru (X}_2\text{)} = \frac{0 \quad 3 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 18}{3}$$

$$X_2 = 0 \quad 1 \quad -1/6 \quad 1/3 \quad 6$$

- **Membuat baris Z baru**

$$\begin{aligned} \text{Baris Z Baru} &= (0 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \quad 120) - (-2) * (0 \quad 1 \quad -1/6 \quad 1/3 \quad 6) \\ &= 0 \quad 0 \quad 5/3 \quad 2/3 \quad 132 \end{aligned}$$

- **Membuat baris variabel baru**

$$\begin{aligned} \text{Baris X}_1\text{ Baru} &= (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 15) - (\frac{1}{2}) * (0 \quad 1 \quad -1/6 \quad 1/3 \quad 6) \\ &= 1 \quad 0 \quad 1/3 \quad -1/6 \quad 12 \end{aligned}$$

Baris kunci baru (X₂), baris Z baru, baris X₁ baru, nilai-nilainya disajikan pada tabel simpleks berikut. Tabel simpleks ini adalah tabel simpleks hasil iterasi kedua.

Tabel 4. Tabel Simpleks Hasil Iterasi-2

Variabel Dasar (VD)	Z	X ₁	X ₂	Slack Variabel		Nilai Kanan (NK)
				X ₃	X ₄	
Z	1	0	0	5/3	2/3	132
X ₁	0	1	0	1/3	-1/6	12
X ₂	0	0	1	-1/6	1/3	6

6. Hasil

Karena nilai-nilai pada baris Z sudah tidak ada yang negatif, berarti iterasi selesai, dan solusi yang diperoleh adalah: $X_1 = \text{Meja} = 12$, $X_2 = \text{Kursi} = 6$ dan Nilai fungsi tujuan Z (laba) = 132 (dalam puluhan ribu rupiah). Artinya, untuk memperoleh keuntungan yang maksimum sebesar Rp.1.320.000, maka perusahaan sebaiknya memproduksi meja sebanyak 12 unit dan kursi sebanyak 6 unit. Dari tabel tersebut juga diketahui nilai X_3 dan X_4 tidak ada (X_3 dan $X_4 = 0$), artinya seluruh waktu kerja (Perakitan dan Pemolesan) sudah habis digunakan, tidak ada waktu yang tersisa.

E. PENYIMPANGAN – PENYIMPANGAN BENTUK STANDAR

a. Fungsi batasan dengan tanda sama dengan (=) maka harus ditambah dengan variabel buatan (*artificial variable*)

Contoh :

1. Fungsi kendala:

$$1) 4X_1 + 2X_2 \leq 60 \text{ menjadi } 4X_1 + 2X_2 + X_3 = 60$$

$$2) 2X_1 + 4X_2 = 48 \text{ menjadi } 2X_1 + 4X_2 + X_4 = 48$$

2. Fungsi tujuan:

$$Z = 8X_1 + 6X_2$$

$$\text{menjadi } Z - 8X_1 - 6X_2 + MX_4 = 0$$

Nilai setiap variabel dasar (X_4) harus sebesar 0, sehingga fungsi tujuan harus dikurangi dengan nilai M dikalikan dengan fungsi batasan yang bersangkutan (2). Diperoleh nilai baris Z sebagai berikut:

$$\left(\begin{array}{cccccc} -8 & -6 & 0 & M & 0 \end{array} \right)$$

$$M \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 48 \end{array} \right) -$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} -2M-8 & -4M-6 & 0 & 0 & -48M \end{array} \right)$$

Bentuk tabel simpleks awal adalah sebagai berikut:

Tabel 5. Tabel Simpleks Awal Untuk Penyimpangan Bentuk Standar

Variabel Dasar (VD)	Z	X_1	X_2	Slack Variabel		Nilai Kanan (NK)	Indeks
				X_3	X_4		
Z	1	$-2M-8$	$-4M-6$	0	0	$-48M$	
X_3	0	4	2	1	0	60	15
X_4	0	2	4	0	1	48	24

➤ **Membuat baris kunci baru**

$$\text{Baris Kunci Baru } (X_1) = \frac{\begin{array}{cccccc} 4 & 2 & 1 & 0 & 60 \end{array}}{4}$$

$$X_1 = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 15$$

➤ **Membuat baris Z baru**

$$\begin{aligned} \text{Baris Z Baru} &= (-2M-8 \quad -4M-6 \quad 0 \quad 0 \quad -48M) - (-2M-8) \cdot (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 15) \\ &= 0 \quad -3M-2 \quad \frac{1}{2}M+2 \quad 0 \quad -18M+120 \end{aligned}$$

➤ **Membuat baris variabel baru**

$$\begin{aligned} \text{Baris } X_4 \text{ Baru} &= (2 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad 48) - (2) \cdot (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 15) \\ &= 0 \quad 3 \quad -1/2 \quad 1 \quad 18 \end{aligned}$$

Baris kunci baru (X_1), baris Z baru, baris X_4 baru, nilai-nilainya disajikan pada tabel simpleks berikut. Tabel simpleks ini adalah tabel simpleks hasil iterasi pertama.

Tabel 6. Tabel Simpleks Iterasi-1 Untuk Penyimpangan Bentuk Standar

Variabel Dasar (VD)	Z	X_1	X_2	Slack Variabel		Nilai Kanan (NK)	Indeks
				X_3	X_4		
Z	1	0	$-3M-2$	$\frac{1}{2}M+2$	0	$-18M+120$	
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	15	7,5
X_4	0	0	3	$-1/2$	1	18	6

Hasil iterasi kedua disajikan pada Tabel 7 berikut:

Tabel 7. Tabel Simpleks Iterasi-2 Untuk Penyimpangan Bentuk Standar

Variabel Dasar (VD)	Z	X_1	X_2	Slack Variabel		Nilai Kanan (NK)	Indeks
				X_3	X_4		
Z	1	0	0	$5/3$	$M+2/3$	132	
X_1	0	1	0	$1/3$	$-1/6$	12	
X_2	0	0	1	$-1/6$	$1/3$	6	

Diperoleh hasil: $X_1 = \text{Meja} = 12$, $X_2 = \text{Kursi} = 6$ dan Z (laba) = 132 (dalam puluhan ribu rupiah).

b. Fungsi Tujuan : Minimisasi

Soal minimisasi harus diubah menjadi maksimisasi dengan cara mengganti tanda positif dan negatif pada fungsi tujuan.

Contoh :

Minimumkan $Z = 3X_1 + 5X_2$

Fungsi batasan:

- 1) $2X_1 = 8$
- 2) $3X_2 \leq 15$
- 3) $6X_1 + 5X_2 \geq 30$

Penyelesaian:

Fungsi batasan:

- 1) $2X_1 + X_3 = 8$
- 2) $3X_2 + X_4 = 15$
- 3) $6X_1 + 5X_2 - X_5 + X_6 = 30$

Fungsi tujuan menjadi: maksimumkan $(-Z) = -3X_1 - 5X_2 - MX_3 - MX_6$
 diubah menjadi fungsi implisit $\Rightarrow -Z + 3X_1 + 5X_2 + MX_3 + MX_6 = 0$

Nilai – nilai variabel dasar (X_3 dan X_6) harus = 0, maka:

$$\begin{array}{r} (3 \quad 5 \quad M \quad 0 \quad 0 \quad M \quad 0) \\ -M(2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 8) \\ -M(6 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 30) \\ \hline (-8M+3) \quad (-5M+5) \quad 0 \quad 0 \quad M \quad 0 \quad -38M \end{array}$$

Tabel hasil iterasinya sebagai berikut:

VD	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	NK	Indeks
Z	-1	$-8M+3$	$-5M+5$	0	0	0	0	$-38M$	
X_3	0	2	0	1	0	0	0	8	4
X_4	0	0	3	0	1	0	0	15	~
X_6	0	6	-5	0	0	-1	1	30	5

VD	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	NK	Indeks
Z	-1	3	$-5M+5$	$4M-3/2$	0	M	0	$-6M-12$	
X_1	0	1	0	$1/2$	0	0	0	4	~
X_4	0	0	3	0	1	0	0	15	5
X_6	0	0	5	-3	0	-1	1	6	6/5

VD	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	NK	Indeks
Z	-1	0	0	M+3/2	0	1	M+1	-18	min
X ₁	0	1	0	½	0	0	0	4	
X ₄	0	0	1	9/5	1	3/5	-3/5	5 2/5	
X ₂	0	0	1	-3/5	0	-1/5	1/5	6/5	

Karena $-Z = -18$, maka $Z = 18$

Penyelesaian optimal: $X_1 = 4$, $X_2 = 6/5$ dan $Z_{\min} = 18$

F. KESIMPULAN

Ringkasan Prosedur Metode Simpleks

1. Formulasikan persoalan ke dalam model linear
2. Tambahkan variabel Slack pada masing-masing constraint (pembatas) untuk memperoleh bentuk standar. Model ini digunakan untuk identifikasi solusi feasible awal dari pembatas bertanda lebih kecil atau sama dengan.
3. Buat tabel simpleks awal (initial simplex table)
4. Pilih Kolom Kunci, yang memiliki nilai Z terkecil.
5. Pilih Baris Kunci yang memiliki nilai indeks terkecil. Nilai indeks adalah perbandingan antara nilai kanan dengan kolom kunci.
6. Menentukan nilai elemen cell yaitu nilai perpotongan antara kolom kunci dengan baris kunci.
7. Lakukan iterasi, dengan membuat baris kunci baru, baris Z baru, dan baris variabel-variabel slack baru.
 - Baris kunci baru ditentukan dengan Membagi baris kunci lama dengan elemen cell.
 - Baris Z Baru dan baris-baris lainnya ditentukan dengan cara = Baris Lama – (Nilai Kolom Kunci Baris yang Sesuai * Baris Kunci Baru)
 - Letakkan nilai-nilai baris yang baru diperoleh tadi ke dalam tabel.
8. Jika pada baris Z masih terdapat nilai negatif, maka ulangi prosedur 4 kembali.

G. DAFTAR PUSTAKA

- Bronson, R., Naadimuthu, G., 1997, *Schaum's Outline of Theory and Problem of Operations Research*, 2nd Edition, New York: McGraw-Hill.
- Hillier, Frederick S. dan Lieberman, Gerald J., 2008, *Introduction to Operations Research – Penelitian Operasional*, Diterjemahkan oleh: Parama Kartika Dewa, The Jin Ai, Slamet Setio Wigati, Dhewiberta Hardjono, Edisi I, Yogyakarta: ANDI.
- Taha, HA, 2003, *Operations Research: An Introduction*, 7th Edition, Prentice Hall Inc.

